OBSERVACIONES EN TORNO A LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA EN *A SYSTEM OF LOGIC* DE JOHN STUART MILL

Prof. Dra. Ana Pía León Miranda[1]
Universidad Andrés Bello, Chile

Resumen: El siguiente trabajo tiene como objetivo analizar y reconstruir la postura de John Stuart Mill respecto del carácter inductivo e hipotético de las leyes fundamentales de la geometría en su obra *A System of Logic*. En el primer apartado, mostraremos que la finalidad de esta obra es entregar un texto antagonista a la extendida doctrina alemana, a saber, *the a priori school*. Mill defenderá la tesis de que todo saber humano se funda y justifica en la experiencia, intentando derrotar al apriorismo en su fuero más fuerte: el conocimiento matemático. En el segundo y tercer apartados, plantearemos la crítica que efectúa Mill a aquella tradición que sostiene que las proposiciones geométricas son analíticas y que las definiciones que las constituyen refieren a conceptos perfectos. En el cuarto y quinto apartados, explicaremos de qué naturaleza son los primeros principios sobre los cuales se funda la geometría. En el transcurso de estos apartados, nos abocaremos a examinar las consecuencias de la inclusión del elemento hipotético en geometría y veremos que, a pesar de su crítica, Mill intentará preservar su estatus de ciencia confiable y de resultados verdaderos.

Palabras claves: Geometría · Inducción · Definiciones · Abstracción · Axiomas

Abstract: The article aims to analyse and reconstruct the position of John Stuart Mill of the inductive and hypothetical characters of the primitive laws of geometry in his *A System of Logic*. In the first section, it will be shown that the purpose of this work is to give an antagonist view to the extended German doctrine, namely, *the a priori school*. Mill will defend the thesis that human knowledge is both founded and justified by experience, by trying to defeat the apriorism in its strongest immunity: the mathematical knowledge. In the second and third sections, Mill's criticism is against that tradition that says that geometric propositions are analytics and their definitions contain perfect concepts. In the fourth and fifth sections, we are to explain the nature of the principles on which geometry is founded. During this development we will focus on the consequences of including the hypothetical aspect in geometry and we shall see that Mill, despite its criticism, intends to maintain the status of geometry as a reliable and true science.

Keywords: Geometry · Induction · Definitions · Abstraction · Axioms

Enviado: 10/10/2013. Aceptado: 01/12/2013

[1] Directora del Departamento de Ciencias del Derecho. E-mail: anpleon@gmail.com

Los propósitos del A System of Logic *y el lugar de la matemática en él.*

En el prefacio a todas las ediciones del *A System of Logic*, Mill (CW, VII), p. cxi, señala que el fin de su libro no es dar al mundo una nueva teoría sobre la lógica, sino regresar a las tesis más importantes emitidas sobre este asunto. El tino y la modestia de Mill (CW, VII), p. 14, al describir su trabajo sorprenden; como también sorprende la aparente neutralidad que adjudica a la lógica, designándola el terreno común de los partidarios de Hartley y de Reid, de Locke y de Kant. Dicha neutralidad, bien nota McRae (1974), p. xxiv, "(…) derives from a distinction which he makes between two ways in which truths may be known." Las verdades pueden ser conocidas por intuición (*sense data*) o por inferencia (verdades derivadas de los *sense data,* es decir, verdades desconocidas derivadas de verdades conocidas). Según Mill, la metafísica se ocupará del primer tipo, mientras que la lógica del segundo. Por metafísica, Mill entiende "(…) that portion of mental philosophy which attempts to determine what part of the furniture of the mind belongs to it originally, and what part is constructed out of materials furnished to it from without" Mill (CW VII), p. 8.

Entonces, si es a la metafísica a la que atañe el estudio de los *data* primitivos-entendidos como las primeras verdades a las que accede el conocimiento- y a la lógica, el estudio de la inferencia; podríamos pensar que el debate relativo a la naturaleza del saber en general y su modo de adquisición es un tema ajeno a los intereses de Mill, quien declara su ánimo por abocarse a la lógica de modo exclusivo. Sin embargo, en su *Autobiography,* (CW I), p. 233, Mill nos revela:

> "The German, or *a priori* view of human knowledge, and of the knowing faculties, is likely for some time longer (though it may be hoped in a diminishing degree) to predominate among those who occupy themselves with such inquiries, both here and on the Continent. But the 'System of Logic' supplies what was much wanted, a text-book of the opposite doctrine -that which derives all knowledge from experience, and all moral and intellectual qualities principally from the direction given to the associations."

Como vemos, el *System of Logic* no pretende ser una simple recopilación crítica de las doctrinas fundamentales de la época, y la reflexión sobre la lógica no se mueve en un plano meramente neutral. Mill tomará partido por una determinada teoría del conocimiento -pero sin caer en las aguas profundas de la metafísica, puesto que no se inmiscuirá en la discusión relativa a la naturaleza de las verdades más básicas entendidas como *sense data*- defendiendo la tesis de que todo conocimiento se funda y justifica en la experiencia. En ese sentido, no es extraño que la parte pertinente a la lógica sea la inferencia,[2] pues ello lo llevará a analizar los tipos de inferencia que existen, concluyendo que a diferencia de la deducción, la inducción es un método ampliativo de conocimiento que surge de la observación de casos particulares (CW VII, p. 186); reivindicando, de este modo, al empirismo frente a la visión alemana o a priori del conocimiento: aquella escuela que defiende, la existencia de verdades o nociones independientes de la experiencia, susceptibles de ser conocidas por el hombre a través de la razón o la intuición, sean tales nociones innatas o externas a él (CW I), p. 232. Por ello, según Höffding (1900), p. 410, nuestro autor se limita a rechazar el pensamiento puro cuando quiere comenzar sin fundamento empírico y acabar sin comprobación empírica.

Generalmente las obras conocidas de Mill son aquellas de corte político, económico y ético, no así las de corte epistemológico. Pero es preciso comentar que sus estudios sobre epistemología y lógica fueron amplios y de gran riqueza, aunque en cierto grado supeditados o relacionados a sus intereses por la praxis. Los motivos por los que Mill desea desarrollar una teoría de la lógica inductiva no se reducen simplemente a su aplicación en la ciencia natural, sino a realizar tal aplicación también en las ciencias morales.

Entonces, si el método inductivo es el verdadero método de conocimiento, si es la observación de casos particulares la que está detrás de cada teoría científica, de cada teoría sobre lo humano, en otras palabras, si Mill pretende mostrar que el gran abanico del saber tiene, en última instancia, no sólo su origen en la experiencia sino su fundamento y justificación allí también; se entiende su álgida lucha contra el apriorismo en los diversos ámbitos del conocimiento y, sobre todo, en el campo de la matemática:

> "The doctrine that truths external to the mind may be known by intuition or consciousness, independently of observation and experiment, is, I am persuaded, in these times the great intellectual support for false doctrines and bad institutions. By the aid of this philosophy every inveterate belief and every strong feeling, of which the artificial origin is not remembered, is dispensed from the obligation of justifying itself by evidence or reason, and is erected into its own sufficient justification. There never was such an instrument devised for consecrating all deep seated prejudices. It is the main doctrinal pillar of all the errors which impede human improvement. And the chief strength of this false philosophy in the departments of morals and religion lies in the appeal which it is accustomed to make to the evidence of mathematics

[2] "The province of logic must be restricted to that portion of our knowledge which consists of inferences from truths previously known; whether those antecedent data be general propositions, or particular observations and perceptions. *Lo*gic is not the science of Belief, but the science of Proof, or Evidence. In so far as belief professes to be founded on proof, the office of logic is to supply a test for ascertaining whether or not the belief is well grounded" Mill (CW I), p. 9.

> and of the cognate branches of physical science. To expel it from these is to attack it in its stronghold. (…)In attempting to clear up the real nature of the evidence of mathematical and physical truths, the System of Logic met the intuition doctrine as it had never before been met" (CW I, p. 232).

Para desenmascarar los presupuestos metafísicos de las más poderosas teorías morales y políticas, es preciso -entonces- atacar su punto más fuerte: la posibilidad del conocimiento a priori en general, el cual se representa -de manera máxima- en la matemática. Mill comprendió que la supuesta necesidad y universalidad de esta ciencia reposaba en una errada caracterización de sus leyes fundamentales, y en una equivocada concepción de las facultades cognoscitivas humanas. Incluso, como nota Kitcher, hasta los empiristas que lo antecedieron se dejaron seducir por esta postura, frente a la cual él permaneció inmune. Para Mill no hay ninguna parte del saber humano cuyo fundamento no sea la experiencia. "(…) Mill's treatment of arithmetic and geometry is a serious attempt to understand these sciences as dealing with the physical properties of everyday things and our mathematical knowledge as grounded in our perceptual interactions with the physical world", Kitcher (1998), p. 58.

Ante la pregunta sobre la evidencia de nuestra creencia en los axiomas matemáticos, Mill responde (CW VII), p. 231: "(…) they are experimental truths; generalizations from observation." Las disquisiciones principales relativas al conocimiento matemático y a sus principios, se esbozan en el libro II del *A System of logic*, en los capítulos v, vi, y vii, donde Mill intenta demostrar que tales principios son inductivos e hipotéticos, y que las definiciones que los constituyen no indican ideas sino hechos físicos. En este trabajo reconstruiremos y comentaremos el estudio relativo a las leyes fundamentales de la geometría.

El postulado de existencia en las proposiciones geométricas. La geometría no se deduce de meras definiciones

Como bien muestra Mill (CW, VII), p. 144, los filósofos que creyeron derrotar al realismo no supieron independizarse adecuadamente de él, defendiendo numerosas proposiciones acordes con tal doctrina: "(i)t had been handed down from Aristotle, and probably from earlier times, as an obvious truth, that the science of Geometry is deduced from definitions." Así, gran parte de la tradición sostuvo que la geometría era una ciencia analítica.

Mill no concuerda con esta postura. Ninguna verdad puede deducirse de meras definiciones, las definiciones son arbitrarias y no hacen más que expresar los predicados comunes que le corresponden a un determinado sujeto:

> "Since names and their signification are entirely arbitrary, such propositions are not, strictly speaking, susceptible of truth or falsity, but only of conformity or disconformity to usage or convention; and all the proof they are capable of, is proof of usage; proof that the words have been employed by others in the acceptation in which the speaker or writer desires to use them" (CW VII, p. 109).

Ahora bien, algunas expresiones incluyen en sí mismas algo más que la mera explicación del significado de un término. Por ejemplo, observemos las siguientes proposiciones relativas al círculo (CW VII), p. 145: 1) existe una figura cuyos puntos equidistan de un punto central A, 2) esa figura se llama círculo. La primera de estas proposiciones no es una definición, la segunda sí. Con la primera proposición podemos dar lugar a diversos razonamientos, y al ser verdadera -afirmando la existencia real de una cosa que posee tales y cuales atributos- "(…) may be foundation sufficient on which to build a whole fabric of scientific truth" (CW VII), p. 144. En cambio, no podemos hacer lo mismo con las definiciones. La definición, a lo sumo, es acorde con el uso habitual. 'Tracemos por el punto B una línea que vuelva sobre sí misma, cada uno de cuyos puntos equidista del punto central A', para construir la figura, vemos, la definición desaparece y es innecesaria, no así el postulado de existencia implicado en ella. Una vez trazada la circunferencia podemos señalar las innumerables verdades que se siguen de tal hecho: si B, C, D, E es una circunferencia, el radio A B será de igual medida que el radio AC, AD y AE; además si todos los puntos que se unen con el centro A son equidistantes entre sí podemos medir la longitud del segmento BE, CD como siendo el doble del radio, es decir del segmento AB, AE, AC, o AD: "B A is equal to C A, not because B C D is a circle, but because B C D is a figure with the radii equal" (CW VII, p. 145). Las premisas de las que los teoremas dependen no se basan en ninguna definición sino en que la figura alrededor del centro A con radio BA puede existir, construirse. Por el contrario, de un mero concepto no podemos llegar a nada más de lo que ya se encuentra contenido en él.

Es interesante atender a cierta similitud con las tesis kantianas en cuanto la geometría opera por construcción de conceptos, no por análisis de éstos. Nos dice Kant:

> "Demos al filósofo el concepto de triángulo y dejémosle que halle a su manera la relación existente entre la suma de sus ángulos y un ángulo recto. No cuenta más que con el concepto de una figura cerrada por tres líneas rectas y con el concepto de otros tantos ángulos. Por mucho que reflexione sobre este concepto, no sacará ninguna conclusión nueva. Puede analizar y clarificar el concepto de línea recta, el de ángulo o el del número tres, pero no llegar a propiedades no contenidas en estos conceptos" (2000), B744-B745.

Ninguna verdad podemos deducir de 'un triangulo significa una figura limitada por tres líneas rectas'. Bien observa Paton (1936), p. 159, "(…) but unless we construct a triangle in intuition, we shall never advance a step beyond our original definition of the concept; we shall never discover, for example, that the three interior angles are equal to two right angles."

> "Si bien la diferencia entre ambos filósofos es sustantiva en el plano teórico, tanto para Mill como para Kant, la geometría no es en su esencia una disciplina cuyas verdades deriven del análisis de los términos que constituyen sus principios fundamentales, sino que hay junto a cada definición, la existencia y posibilidad de construcción empírica del concepto para el primero; la posibilidad de la construcción del concepto en la intuición pura del espacio para el segundo".

Las ideas abstractas y la abstracción perfectiva frente a la abstracción por 'conveniencia científica'.

Ahora bien, uno de los motivos, dice Mill, que ha llevado a la tradición a creer que la geometría se deduce de meras definiciones y a rechazar la importancia de los postulados de existencia implícitos es que tales no pueden ser de verdad exacta: "(i)t is not true that a circle exists, or can be described, which has all its radii *exactl*y equal. Such accuracy is ideal only; it is not found in nature, still less can it be realized by art" (CW VII), p. 148.

Entonces, como la existencia de las entidades geométricas no es tal, se ha intentado salir de este problema -que pone en jaque la necesidad y certeza matemática- sosteniendo que las definiciones atañen a ideas abstractas. Es decir, 'un círculo es una figura cuyos radios son iguales' no es la aserción relativa a un círculo existente sino, más bien, una proposición que enuncia que concebimos una figura determinada que posee semejantes características.

Así, para muchos filósofos el objeto propio del conocimiento matemático no alude a cosas existentes, sino a ideas abstractas que crea la mente sacando los materiales de la propia naturaleza.[3] Por ejemplo, una línea geométrica definida como una línea sin anchura sería la definición de una línea imaginaria. En este proceso, la mente "(…) by working on their own materials, construct an a *priori* science, the evidence of which is purely mental, and has nothing whatever to do with outward experience" (CW VII), p. 225.

[3] "Conformably to this it is said, that the subject-matter of mathematics, and of every other demonstrative science, is not things as they really exist, but abstractions of the mind. A geometrical line is a line without breadth; but no such line exists in nature; it is a notion merely suggested to the mind by its experience of nature" Mill (CW VII), p. 149.

Esta postura en gran medida puede ser adjudicada a Hume en tanto que si bien -al igual que Mill- desecha la tesis de que las formas geométricas existan en sí mismas, cree que la mente, después de haber considerado varios criterios particulares, imagina uno tan correcto que ya no es susceptible de error.[4] Por eso, la abstracción que defiende Hume es un tipo de abstracción perfectiva. Observa Kitcher (1998), p. 82, "Hume had already pondered the idea that we can obtain certain knowledge of geometrical axioms by exhibiting to ourselves the relations among geometrical concepts. He envisaged this process as one of inspecting the properties of mental images."

Mill no está de acuerdo con esta salida, pues las conclusiones que parecen seguirse de las ideas abstractas, se siguen realmente del objeto físico particular. La mente no puede concebir y crear una noción perfecta correspondiente a la definición por medio de ninguna facultad. Por ejemplo en el caso de la línea "(…) it can only, in contemplating objects, attend to their length, exclusively of their other sensible qualities" (CW VII), p. 149.

Mill (CW VII), p. 225, insiste en que esta teoría es "(…) psychologically incorrect. The points, lines, circles, and squares which any one has in his mind, are (I apprehend) simply copies of the points, lines, circles, and squares which he has known in his experience." En palabras de Kitcher (1998), p. 82, la inspección de las propiedades geométricas trazadas en nuestra mente "(…) cannot work wonders that are unattainable by ordinary perception."

Así, una línea tal y cual la definen los geómetras es completamente inconcebible, pues las definiciones refieren al postulado de existencia implícito en ella:

> "Since, then, neither in nature, nor in the human mind, do there exist any objects exactly corresponding to the definitions of geometry, while yet that science cannot be supposed to be conversant about non-entities; nothing remains but to consider geometry as conversant with such lines, angles, and figures, as really exist (…)" (CW VII), p. 226.

No podemos concebir una longitud sin anchura pero podemos aludir meramente a la longitud fijando la atención "(…) to a part only of that perception or conception, instead of the whole" Mill (CW VII), p. 225. Como nota Kitcher (1998), p. 83: "(r) ather, (…), we introduce a language that actually applies to nothing in the world at all, but which we treat as applying to external objects and images alike by abstracting from some of the features they actually present."

[4] "Si bien esos términos o nociones se originan a partir de las impresiones, la imaginación después de considerar muchos criterios de lo mismo, perfecciona y corrige las imperfecciones hasta tener un criterio adecuado: "(…) nuestra tarea es remediar este defecto tanto como sea posible, haciendo a la idea estable y precisa, y hasta conseguir esto es en vano pretender razonar y filosofar." Hume (1923), III, i, p. 127.

Las definiciones deben ser consideradas como las primeras y más evidentes generalizaciones de la experiencia y como tales ellas son exactas (CW VII), p. 226. La verdad de la igualdad de los radios de un círculo no es sino tan aproximadamente que, al *suponer* que es cierta en la práctica, no producirá errores importantes; y visto que estamos observando las propiedades matemáticas de un objeto, lo que hace la mente es despreciar aquellas que no lo son y tratarlas como si no existieran: "(w) e are thinking, all the time, of precisely such objects as we have seen and touched, and with all the properties which naturally belong to them; but, for scientific convenience, we feign them to be divested of all properties, except those which are material to our purpose, and in regard to which we design to consider them" (CW VII), p. 226.

Pero, como insiste Mill (CW VII), p. 226 "(…) it is an error to suppose, because we resolve to confine our attention to a certain number of the properties of an object, that we therefore conceive, or have an idea of, the object, denuded of its other properties." Jackson observa que Mill, para sustentar sus dichos, utiliza el buen conocimiento que posee de la filosofía de Berkeley:[5] "(a)bstraction is conceded; abstract ideas are rejected. Nothing, whether real or imaginary, need have (or lack) the properties which things may be thought of as having (or lacking)" Jackson (1941), p. 28.

De esta forma, Mill soluciona el problema de la referencia de las definiciones matemáticas. Por eso, hay que saber diferenciar la abstracción 'por conveniencia científica' de las ideas abstractas, puesto que el acto abstractivo -insistimos- no brinda un objeto perfecto sobre el cual razonar. Como bien dice Ryan, Mill defiende un tipo de abstracción "(…) by which he understands the mental ability to 'think away' those features of real or imaginary lines which differ from those of their pure Euclidean counterparts" (1974), p. 69. Concluye Jackson (1941), p. 29, "(…) we feign the objects of geometry exactly to conform to the definitions."

Ahora bien, lo propuesto por Mill –como nota Ryan- nos lleva a una pregunta que él no aclara en el texto: ¿Cómo sabemos qué características hay que ignorar o abstraer del objeto matemático? La respuesta que Ryan ensaya es de corte heurístico en tanto que la geometría euclidiana impone los estándares para la estimación de la longitud, de la circularidad, etc., de los objetos, entregándonos con sus estrictas definiciones -en palabras de Mill- *el límite ideal o* -tomando en préstamo un concepto acuñado por Skorupski (1989), p. 134- *los límites de las posibilidades permanentes de construcción.* Según Ryan (1974), p. 70: "(o)nly if this is accepted can Mill talk

[5] Berkeley elabora una teoría de la abstracción en defensa del nominalismo y en contra del conceptualismo: "Y debe considerarse aquí que un hombre puede considerar una figura exclusivamente como triangular, sin prestar atención a las cualidades particulares de los ángulos, o relaciones entre los lados. Hasta aquí puede abstraer: pero esto no probará que pueda formarse una idea general abstracta contradictoria de triángulo" Berkeley (2008), par 16.

of ignoring 'departures' from the Euclidean ideal. It is not that we have propensity to abstract, and that this produces the beliefs we call geometry; rather, geometry sets the standards by which we decide whether we have abstracted *correctly*."

Así, nota Skorupski (1989), las definiciones serían *conceptos límites*. Nociones tales como 'punto sin extensión' o 'línea sin anchura' podrían explicarse de modo simplemente ostensivo, sin necesidad de aludir a entidades abstractas. Por ejemplo, el concepto 'línea sin anchura' sería una definición ostensiva de progreso de alguna 'clase' de objetos reales, es decir, el límite aproximado en una progresión de líneas que disminuyen en su anchura. El acento estaría en el modo en que los gráficos empíricos logran acercarse en mayor grado a esas contrapartes euclidianas.

> "Though experience furnishes us with no lines so unimpeachably straight that two of them are incapable of inclosing the smallest space, it presents us with gradations of lines possessing less and less either of breadth or of flexure, of which series the straight line of the definition is the ideal limit. And observation shows that just as much, and as nearly, as the straight lines of experience approximate to having no breadth or flexure, so much and so nearly does the space-inclosing power of any two of them approach to zero" (CW VII), p. 232.

A partir de las tesis de Skorupski (1989), que tienen asidero en la postura milliana, podemos suponer que las figuras pueden ser definidas por un número reducido de conceptos: punto, línea, rectitud, plano y la idea de construcción. Por ejemplo, una figura rectilínea es una construcción limitada por líneas rectas. Ahora bien -y este punto es fundamental- la construcción nunca será perfecta puesto que los ángulos de ésta no son completamente rectos pero ¿qué es esa noción de 'figura perfecta' sino un concepto límite también? Skorupski (1989), p. 134. Esos conceptos límites son nociones heurísticas que remiten a la posibilidad que yace en la experiencia de poder realizar construcciones acordes a las definiciones: "(w)e simply take our geometrical assertions about figures to be more nearly true, the closer those figures are to being perfect" Skorupski (1989), p. 134.

Como hemos visto, en estos primeros apartados hay dos puntos centrales que observar: el primero es la tesis de que a cada definición la acompaña un postulado de existencia del cual se derivan las verdades de la geometría; y el segundo es -por decirlo de algún modo- la precisión de la idea anterior. Mill arguye y explica precisamente en qué consiste ese postulado a partir del cual trabaja el matemático. Si el matemático habla de puntos sin anchura o círculos perfectos lo hace porque ignora de los objetos reales las características que no le son favorables a sus investigaciones, siguiendo, como hemos tratado de establecer con Ryan y Skorupski, las pautas que le brindan las contrapartes euclidianas.

La geometría está fundada en hipótesis y en axiomas.

Dado que encontramos objetos de los cuales hemos despojado intencionalmente ciertas características para quedarnos con otras que sirven a la investigación matemática, Mill (CW VII), p. 226, nos dice: "(t)he peculiar accuracy, supposed to be characteristic of the first principles of geometry, thus appears to be fictitious. The assertions on which the reasonings of the science are founded, do not, any more than in other sciences, exactly correspond with the fact; but we suppose that they do so, for the sake of tracing the consequences which follow from the supposition."

En este sentido, Mill declara estar en parte de acuerdo con Stewart para quien la geometría está fundada en hipótesis. Stewart (1847), p. 483, afirma: "(a)ccording to the account of demonstrative or mathematical evidence formerly given, the first principles on which it rests are not eternal and immutable truths, but definitions or hypotheses."

En toda ciencia se puede obtener un aparato de conclusiones certero, conclusiones provenientes de hipótesis, de tal modo que fuerzan el asentimiento de todos *a condición* de que éstas sean verdaderas. En cambio, "(w)hen, (…), it is affirmed that the conclusions of geometry are necessary truths, the necessity consists in reality only in this, that they 'correctly' follow from the suppositions from which they are deduced" (CW VII), p. 227.

Este punto es muy importante puesto que Mill no niega que la geometría pueda ser considerada una ciencia de verdades necesarias, pero esta necesidad emana del procedimiento geométrico. Es decir, lo que se concluye por medio del procedimiento, desde el punto de vista formal, es verdadero de forma incontestable. Por eso, la única manera en que se pueden considerar las conclusiones como necesarias es que se sigan de un modo estricto y cabal desde una hipótesis, sin que tal sea puesta en tela de juicio.

Mill retoma las observaciones de Whewell contra Stewart, según el cual las premisas de la geometría no se fundan en hipótesis sino en suposiciones relativas a la existencia real de cosas correspondientes a las definiciones. En palabras de Whewel (1847), p. 92: "(b)ut it is to be observed that these definitions and axioms are very far from being arbitrary hypotheses and assumptions", pues ellas se originan, agrega, por la idea de espacio, "(…) and are merely modes of exhibiting that idea in such a manner as to make it afford grounds of deductive reasoning."

Whewell (1860), p. 462, defendiendo el carácter analítico de la geometría nos dice en *On the Philosophy of Discovery*:

> "The meaning of the terms being understood, and the proof being gone through, the truth of the proposition must be assented to. That parallelograms upon the same base and between the same parallels are equal; -that angles in the same segment are equal;- these are propositions which we learn to be true by demonstrations deduced from definitions and axioms; and which, when we have thus learnt them, we see could not be otherwise."

Por ello, en virtud de la verdad inconcusa de los axiomas y definiciones que afirmamos, las conclusiones son consecuencias necesarias de los mismos. Claramente, Mill rechaza esta posición e insiste que Whewell no ve justamente que esas definiciones o suposiciones relativas a las definiciones son, en realidad, las mismas hipótesis que él niega en nombre de nociones a priori, no ve que son hipótesis que refieren -por cierto- a objetos reales, en el sentido de objetos de naturaleza empírica, no ideal.

Mill arguye que aquello que lleva a Whewell a distinguir entre hipótesis y definiciones es la creencia errada de que las primeras no tienen relación con el objeto de estudio. Sin embargo, aquellos que defienden el carácter hipotético de las premisas de la geometría sostienen que ellas refieren a algo real, puesto que la investigación acontece en el ámbito de lo científico y no en el ámbito de la ficción.[6] De ahí que es fundamental entender que la mente no puede inventar propiedades no existentes en las cosas, a lo sumo puede exagerarlas o suprimir las características que no convienen a la investigación.

> "(…) we must not ascribe to the thing any property which it has not; our liberty extends only to slightly exaggerating some of those which it has, (by assuming it to be completely what it really is very nearly) and suppressing others, under the indispensable obligation of restoring them whenever, and in as far as, their presence or absence would make any material difference in the truth of our conclusions" (CW VII), p. 228.

Ahora bien, Mill cree que el verdadero acierto de Whewell sobre Stewart está en mostrar que los primeros principios de la geometría constan no sólo de definiciones (o hipótesis desde la perspectiva Mill-Stewart) sino de axiomas. Algunos axiomas euclidianos pueden ser puestos bajo forma de definiciones o pueden deducirse de

[6] Este argumento se vincula con la problemática relativa al silogismo entendido como procedimiento dialéctico o como procedimiento científico. Mill cuando analiza al silogismo como modelo de inferencia insiste que éste debe ser tratado en relación a su capacidad ampliativa de conocimiento, es decir, como un tipo de inferencia científica y no como una mera estructura formal que nos permite asentir conclusiones sin referencia a su origen y sólo al cumplimiento de reglas formales relacionadas con sus términos. Este tema ha sido abordado por Anschutz (1949).

proposiciones semejantes a las definiciones. Así, en vez del axioma 'las dimensiones que se pueden hacer coincidir son iguales' podemos acudir a la siguiente definición: 'las dimensiones iguales son aquellas que pueden ser aplicadas la una a la otra de manera que coincidan'. Por otro lado, algunos axiomas pueden ser probados por principios más básicos. Junto con estos axiomas hay otros que son indemostrables como el quinto postulado de Euclides. Ahora bien,

> "The axioms, as well those which are indemonstrable as those which admit of being demonstrated, differ from that other class of fundamental principles which are involved in the definitions, in this, that they are true without any mixture of hypothesis. That things which are equal to the same thing are equal to one another, is as true of the lines and figures in nature, as it would be of the imaginary ones assumed in the definitions" (CW VII), p. 230.

A modo conclusivo, la geometría posee dos tipos de principios generales. Los que no precisan de la incidencia de la mente para ser reconocidos como tales y que, al ser fruto de inducciones generalísimas y confiables, son verdaderos: los axiomas; y las proposiciones que son *verdaderas* de modo aproximado y que requieren de ficciones para acercarse al modelo euclidiano: las hipótesis o definiciones.

Observaciones en torno al elemento hipotético en geometría

Ahora bien, la tesis acerca del elemento hipotético que yace como uno de los fundamentos del conocimiento geométrico ha sido criticada por algunos autores. Ryan (1970), p. 81, comenta que la postura de Mill en relación a la necesidad de las verdades geométricas es extraña, puesto que consiste en la falsedad de las premisas. Por otro lado, como observa Copleston,

> "Mill dice que llamar a las conclusiones de la geometría verdades necesarias significa en realidad que se deducen correctamente de presupuestos que "ni siquiera son verdaderos". Lo que quiere decir, por supuesto, es que la necesidad de las conclusiones está en el hecho de que se siguen necesariamente de las premisas. Pero si fuéramos a tomarnos literalmente la insinuación de que las verdades necesarias lo son porque se deducen de presuposiciones falsas, tendríamos que alegar que Mill decía cosas sin sentido. Y no sería justo verlo así" (2000), pp. 71-72.

En la primera nota a pie de página del libro II, v, 2, Mill nos explica el modo en que usa el término hipótesis, y asevera que difiere del modo convencional usado en ciencias. En ciencias una hipótesis es una suposición que no está probada como verdadera pero se supone verdadera pues al serlo da cuenta de ciertos hechos, y el resultado final de la tesis probaría su verdad. Pero las hipótesis "(…) spoken of in the text are of a different character; they are known not to be literally true (…) but certain" (CW VII), p. 227.

Mill se enfrenta a dos conceptos de verdad. Una verdad que podríamos llamar formal que tiene que ver con la sucesión de premisas a conclusiones; y una verdad material, es decir que atañe al contenido de las premisas, que debe entenderse como certidumbre. En otras palabras, la estricta necesidad del procedimiento matemático sólo emana de la deducción que realizamos desde las premisas hasta la conclusión: "(t)he results of those sciences are indeed necessary, in the sense of necessarily following from certain first principles, commonly called axioms and definitions; *that* is, of being certainly true if those axioms and definitions are so (…)" (CW VII), p. 252.

Ahora bien, Mill no dice que una gran parte de los primeros principios de la geometría son falsos y que de premisas falsas se siguen conclusiones verdaderas, sino sostiene que no es estrictamente verdad que exista una cosa que se conforme a la definición.[7] En ese sentido, las premisas no son necesarias -tal y como la tradición ha entendido ese concepto- y ni siquiera son rigurosamente verdaderas (CW VII), p. 225 porque, justamente, parte de ellas no son axiomas (las más confiables generalizaciones que no requieren el elemento hipotético) sino hipótesis. No obstante, estas hipótesis son altamente confiables porque son científicas y, por ende, tienen relación con los hechos mismos:

> "Since an hypothesis framed for the purpose of scientific inquiry must relate to something which has real existence, for there can be no science respecting non-entities, it follows that any hypothesis we make respecting an object, to facilitate our study of it, must not involve anything which is distinctly false, and repugnant to its real nature" (CW VII), p. 228.

[7] Incluso es necesario observar que Mill en las siete ediciones (1848-1868) anteriores a la octava y última del *A System of Logic* había dicho que es *falso* que exista algo que se corresponda a las definiciones. Aquí la cita: "Now we have pointed out that, from a definition as such, no proposition, unless it be one concerning the meaning of a word, can ever follow; and that what apparently follows from a definition, follows in reality from an implied assumption that there exists a real thing conformable thereto. This assumption, in the case of the definitions of geometry, is *false*: there exist no real things exactly conformable to the definitions." (II, v, 1. Las cursivas son nuestras). Ahora bien, Mill en la última edición, la del 1872, cambia la palabra 'false' por 'not strictly true': "Now we have pointed out that, from a definition as such, no proposition, unless it be one concerning the meaning of a word, can ever follow; and that what apparently follows from a definition, follows in reality from an implied assumption that there exists a real thing conformable thereto. This assumption, in the case of the definitions of geometry, *is not strictly true*: there exist no real things exactly conformable to the definitions. (Mill (CW VII), p. 225). Como vemos, Mill se preocupa en matizar el tema de la correspondencia entre la definición y su referencia.

Por ello, dice Mill: "(i)t is of course needful to hear in mind that the hypothetical element in the definitions of geometry is the assumption that what is very nearly true is exactly so" (CW VII), p. 227. Este punto es muy interesante ya que, como opina Kitcher (1998), p. 85: "(g)eometry, then, is an empirical science, whose ultimate justification rests on the regularities that physical objects approximate and that we build into our idealizing definitions."

Si bien Mill había dicho que ningún objeto físico se parece exactamente a lo que mientan las definiciones, podemos ver que la geometría de igual modo no queda arrojada a la incertidumbre, pues la exactitud de sus premisas radica en la aproximación a la verdad del objeto idealizado; aproximación que llevamos a cabo por medio de nuestras capacidades mentales. Comparece así una suerte de ideal heurístico en el cual- como nota Skorupski (1989), p. 134- "(t)he 'fictional' or 'hypothetical' form of geometrical postulates explains the exactness of geometrical science."

Las hipótesis tienen una conexión tan real con el objeto, que el propio Mill (CW VII), p. 227, duda si usar el nombre de 'ficción' para denominar esta actitud hipotética, pues tal "(…) would fail to point out the close relation which exists between the fictitious point or line and the points and lines of which we have experience." Incluso, en el procedimiento geométrico se ha establecido un lenguaje que supera ya el problema de la ficcionalidad. Siguiendo a Kitcher (1998), pp. 84-85:

> "Geometers have learned to liberate themselves from messy investigations of approximate equality, by introducing a language that, strictly speaking, applies to nothing at all, but works very effectively in studying the properties of actual things. The usage of that language rests upon the fund of experiences that acquaint us with its effectiveness."

Por lo mismo, Kitcher sostiene que las tesis de Mill acerca de la geometría elemental son fácilmente defendibles porque entrañan la manera en que las definiciones geométricas se relacionan con el mundo cotidiano. Desde las antiguas civilizaciones la gente usó la geometría para lidiar con aspectos prácticos del mundo real: medir áreas, evaluar la distancia entre dos ciudades, etc., y es evidente que si bien sus definiciones no se ajustan estrictamente a los objetos de la realidad, ello no ha significado un mayor obstáculo en tanto que la geometría euclidiana nos suministra igualmente un importante apoyo a nuestras pesquisas.

Aunque las definiciones no son como los axiomas, cuya verdad no requiere de ningún tipo de suposición, Mill nos pide considerarlas también como parte de nuestras primeras generalizaciones.

> "We there remarked, that the directly inductive truths of mathematics are few in number; consisting of the axioms, together with certain propositions concerning existence, tacitly involved in most of the so-called definitions. And we gave what appeared conclusive reasons for affirming that these original premises, from which the remaining truths of the science are deduced, are, notwithstanding all appearances to the contrary, results of observation and experience; founded, in short, on the evidence of the senses" (CW VII) p. 609.

Conclusiones

La postura de Mill en torno al fundamento inductivo de la geometría se engrana en tres ejes centrales que hemos tratado de dilucidar en estas páginas: a) el postulado de existencia implicado en las definiciones geométricas, b) la abstracción por conveniencia científica, y c) el carácter hipotético y axiomático de los primeros principios de la geometría. Mill muestra un profundo rechazo frente a aquellos que sostienen que la geometría es una ciencia analítica, intentado demostrar -en contraposición- que las definiciones que yacen en sus cimientos remiten a hechos y no a ideas, siendo los hechos el punto de partida de toda deducción matemática. Si bien no existen círculos perfectos, líneas sin anchura, nuestra mente toma el objeto empírico e ignora las características que estorban al razonamiento geométrico de modo tal de adecuarlo a la definición, parámetro guía del trabajo abstractivo. Comparece aquí el análisis crítico que realiza Mill relativo a la abstracción perfectiva, pues la mente no tiene la capacidad de perfeccionar el objeto de estudio convirtiéndolo en una idea abstracta, sino de ignorar - por medio de la abstracción por conveniencia científica- aquellas características que entorpecen la reflexión matemática.

Bajo esa misma línea, impugna la aparente necesidad de la geometría la cual se ancla en el supuesto carácter a priori de los principios que la constituyen. Necesarias son únicamente las conclusiones que se siguen formalmente desde los primeros principios, nos dice. Pero los primeros principios de la geometría lejos de ser verdades a priori son inducciones de la experiencia: axiomas e hipótesis. Los axiomas son nuestras primeras y más seguras generalizaciones, y en ese sentido se nos revelan como verdades irrefutables; y las hipótesis son las ya mencionadas definiciones, cuya verdad lo es de modo muy aproximado, es decir, son hipótesis en la medida en que nada se conforma de modo exacto a ellas, sino que fingimos los objetos en tal conformidad. Las hipótesis no discurren sobre elementos fantásticos sino reales, porque son científicas y, por ende, tienen relación con los hechos mismos. De este modo, la geometría no se pierde en la incertidumbre que radicaría -supuestamente- en el hecho de negar el estatus a priori de sus verdades fundamentales, sino más bien podemos seguir defendiendo su exactitud puesto que ella depende de la aproximación del objeto estudiado a las contrapartes euclidianas. De este modo, hipótesis y axiomas adquieren la cara de generalizaciones inductivas confiables y seguras.

BIBLIOGRAFÍA

Anschutz, R. (1949). "The logic of John Stuart Mill", en: *Mind Review*, vol. LVIII, Nro. 231, pp. 277-305.

Berkeley, G. (2008). *Philosophical writings*, Clarke, D. (ed), Cambridge: Cambridge University Press.

Copleston, F. (2000). *Historia de la Filosofía,* tomo VIII, Barcelona: Ariel.

Höffding, H. (1900). *History of modern philosophy*, Michigan: Macmillan & Co.

Hume, D. (1923). *Tratado sobre la naturaleza humana,* Viqueira, V. (trad.), Madrid: Colección Universal.

Jackson, R. (1941). "Mill's treatment of geometry. A reply to Jevons", en*: Mind Review,* vol 50, pp. 22-42, Nro. 197.

Kant, I. (2000). *Critica de razón pura,* Ribas, P (tr), Madrid: Alfaguara.

Kitcher, Ph. (1998). "Mill, mathematics, and the naturalist tradition", en: Skorupski, J. (ed.). *The Cambridge Companion to Mill*, pp. 57-111. Cambridge: Cambridge University Press.

McRae, R. (1974). *Introduction,* en*: "A System of Logic Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation" (Books I-III),* pp. xlix- cviii, Toronto: University of Toronto Press; London: Routledge and Kegan Paul.

Mill, J. S. (1873). *Autobiography and Literary Essays*, Robson, J (ed), vol. I, Toronto: University of Toronto Press; London: Routledge and Kegan Paul (reimp 1981).

Mill, J. S. (1872). *A System of Logic Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation (Books I-III),* Robson, J. (ed.), vol. VII, pp. 3-638, Toronto: University of Toronto Press; London: Routledge and Kegan Paul, 8va. Edición (reimp. 1974).

Paton, H. (1936). *Kant's Metaphysic of experience,* London: Unwin Brothers.

Ryan, A. (1970). *John Stuart Mill,* New York: Pantheon Books.

Ryan, A. (1974). *John Stuart Mill.* London: Routledge and Kegan Paul.

Skorupski, J. (1989). *John Stuart Mill*, Cornwall: T.J. Press.

Whewell, W. (1847). *Philosophy of the inductive science,* vol. 1. London: John W. Parker, West Strand.

Whewell, W. (1860). *On the Philosophy of Discovery*, London: John W. Parker and Son, West Strand.