

Prácticas Docentes y Promoción de Razonamiento Matemático en un Aula Universitaria

Teaching Practices and Promotion of Mathematical Reasoning in a University Classroom

Romina Aranda Cáceres¹ y María Victoria Martínez Videla²

¹ Departamento de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad de Aysén

² Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de O'Higgins

Desde una perspectiva sociocultural, se abordan las prácticas docentes para la enseñanza de las matemáticas en la educación superior. El principal objetivo del estudio fue caracterizar las prácticas docentes y el desarrollo del razonamiento matemático en un aula de matemática universitaria. Se utilizó un enfoque metodológico cualitativo que contempló en su diseño un estudio de caso, correspondiente a una unidad académica de una universidad chilena altamente selectiva. Se utilizaron tres técnicas de producción de información: entrevista al docente, grupo focal con 7 estudiantes y observación de clases (registro escrito y videograbación), realizando un análisis de contenido para la información producida mediante las dos primeras. Para el material audiovisual se realizó codificación de las interacciones y un análisis interpretativo desde el punto de vista de la acción mediada. Para el registro escrito, un análisis temático. Los resultados muestran similitudes en las comprensiones que tienen los actores educativos, tales como la importancia del razonamiento matemático para el aprendizaje de la disciplina. Así mismo diferencias, como la presencia o no de prácticas docentes orientadas a promover el razonamiento matemático en el aula. Finalmente, se observan tensiones entre las dimensiones de la práctica, que son discutidas a partir del control del discurso docente y los distintos niveles de apropiación y dominio de las herramientas culturales. Como principal conclusión se plantea que, para favorecer el razonamiento matemático desde una perspectiva de equidad e inclusión, es crucial que la diversidad aparezca en el aula, brindando apoyos ajustados para la apropiación progresiva de los modos de mediación.

Palabras clave: educación superior, prácticas docentes, razonamiento matemático, observación de clases, interacciones de aula

From a sociocultural perspective, teaching practices for teaching mathematics in the context of higher education are addressed. The main objective of the study was to characterize teaching practices and the development of mathematical reasoning in a university mathematics classroom. A qualitative methodological approach was used, which included a case study design, corresponding to an academic unit of a highly selective Chilean university. Three information production techniques were used: teacher interview, focus group with 7 students and class observation (with written registration and video recording), carrying out a content analysis for the information produced by the first two techniques. For the audiovisual material, the interactions were codified, and an interpretative analysis was made from the point of view of mediated action. For the written material, a thematic analysis was performed. The results show similarities in the understanding of the educational actors, such as the importance of mathematical reasoning for learning the discipline. There are also differences, such as the presence or absence of teaching practices aimed at promoting mathematical reasoning in the classroom. Finally, tensions are observed between the dimensions of practice, which are discussed on the basis of the control of the teaching discourse and the different levels of appropriation and mastery of cultural tools. The main conclusion is that to favor mathematical reasoning from a perspective of equity and inclusion, it is crucial that diversity appears in the classroom, providing adjusted support for the progressive appropriation of the modes of mediation.

Keywords: higher education, teaching practice, mathematical reasoning, classroom observation, classroom interaction

Romina Aranda Cáceres  <https://orcid.org/0000-0001-5070-010X>

María Victoria Martínez Videla  <https://orcid.org/0000-0002-9866-1805>

El artículo es parte de la tesis de la primera autora para Optar al Grado de Magíster en Psicología Educacional de la Universidad de Chile. Se agradece el financiamiento otorgado por ANID/PIA/Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003. No existe ningún conflicto de intereses que revelar.

La correspondencia relativa a este artículo debe ser dirigida a Romina Aranda Cáceres, Departamento de Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad de Aysén, Eusebio Lillo 667, Coyhaique, Región de Aysén, Chile. Email: romina.aranda@uaysen.cl

La reforma educacional implementada en Chile en la década de los 80, durante la dictadura militar, amplió y diversificó la estructura del sistema educativo (Bernasconi & Rojas, 2004; Zurita Garrido, 2015), a la vez que instaló mecanismos de competencia entre instituciones, basados en lógicas de oferta y demanda (Brunner & Uribe, 2007; Uribe et al., 2008; Zurita Garrido, 2015). A partir de ello se generó un proceso de "masificación" (Brunner, 2013) desmedida e inequitativa en el acceso a las universidades que, si bien ha integrado a estudiantes provenientes de sectores populares, al mismo tiempo los ha excluido de las instituciones de mayor prestigio (Brunner, 2008; Canales Cerón et al., 2016).

Desde hace más de una década, las universidades altamente selectivas han comenzado a problematizar la composición de su matrícula, a la luz de reflexiones académicas, de la evidencia científica disponible y de las demandas de los movimientos sociales. Lo anterior se ha traducido en el ingreso de estudiantes con menores niveles de capital cultural, social y económico a este tipo de instituciones (Santelices et al., 2015; Sebastián, 2007).

En el ámbito académico, la formación matemática previa se ha descrito como una de las principales brechas en estudiantes universitarios de primer año (Cifuentes Orellana et al., 2017; Cifuentes Orellana & Mella Luna, 2017; Karnani, 2018). A nivel internacional, varios autores coinciden en que el tránsito desde la enseñanza secundaria a la educación superior implica grandes dificultades para un segmento importante de estudiantes (De Guzmán et al., 1998; Gueudet, 2008;), especialmente en carreras donde la matemática juega un rol esencial (Beanland, 2010; Brannan & Wankat, 2005; Graff & Leiffer, 2005; Nite et al., 2016; Tolley et al., 2012).

Para abordar este desafío, muchas universidades comenzaron a adoptar como principal estrategia la implementación de cursos remediales (Chingos et al., 2017; Jones et al., 2012) que, en Chile, han tomado la forma de dispositivos de nivelación disciplinar (Cifuentes Orellana et al., 2017; López y Pérez, 2013; Pontificia Universidad Católica de Chile, s.f.). Los cursos remediales, sin embargo, son cuestionados por presentar altos costos e índices de fracaso y también porque podrían resultar desalentadores para muchos estudiantes (Bailey et al., 2010; Chingos et al., 2017; Jones et al., 2012).

A partir de esto, se plantea que el compromiso de las instituciones con la equidad requiere la problematización del currículum y de la enseñanza (Fitzsimons, 2011). Esto supone necesariamente una transformación de las universidades y de las aulas en pos del desarrollo de los aprendizajes en un contexto de diversidad, adaptando formas y métodos de enseñanza que consideren la diferencia como elemento fundamental (Castro et al., 2016). Lo anterior resulta complejo en un contexto donde la mayoría de los docentes universitarios no cuenta con formación pedagógica.

En este escenario, los programas de formación y perfeccionamiento en docencia universitaria han cobrado relevancia e interés para favorecer el desarrollo de habilidades pedagógicas que contribuyan a mejorar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Peña-Vicuña y Acosta-Peña, 2023). Al respecto, Speer et al. (2010) plantean que el diseño de estos programas requiere de una mayor comprensión sobre prácticas de enseñanza, ya que, en general, las investigaciones no han considerado elementos disciplinares específicos (Bain, 2004; Bain & Zimmerman, 2009; Hativa et al., 2001; Mesa et al., 2014).

El conocimiento de esta especificidad es relevante para orientar procesos de aprendizaje profundos y formas de pensamiento complejo en los estudiantes de educación superior. Existen estudios interesantes que aportan a esta comprensión. Por ejemplo, Mesa et al. (2014) muestran el predominio de preguntas rutinarias —para las que se esperan respuestas o modos de resolución conocidos— y, en un porcentaje mínimo, preguntas novedosas —en las que el docente desconoce la respuesta—. La misma tendencia se observó en un estudio anterior, sobre asignaturas complejas, como cálculo avanzado para ingenieros (Mesa & Chang, 2010) y en uno posterior que problematiza el uso de preguntas centradas en el contenido matemático para evaluar conocimientos previos (Mota y Valles, 2015). Mkhathshwa (2024) por su parte, ha realizado aportes en el estudio de prácticas docentes efectivas para enseñar el concepto de derivada.

Así mismo, la amplia evidencia empírica proveniente del contexto escolar constituye un recurso valioso para avanzar en el nivel universitario. Al respecto, las interacciones en el aula son consideradas fundamentales para la comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Igualmente lo es la naturaleza de las preguntas y tareas que utilizan los docentes para que sus estudiantes desarrollen habilidades complejas de pensamiento, que les permiten proponer soluciones alternativas y analizar y justificar su razonamiento (Bose & Remillard, 2011; Stein et al., 2000). Esto implica la enseñanza de la competencia matemática (Ball, 2001).

La observación de clases se ha configurado como una herramienta que permite acceder a información de gran valor sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Ferguson & Danielson, 2014; Felmer et al., 2015; Godoy Ossa et al., 2016 Hill et al., 2008; Martínez et al., 2018; Treviño et al., 2013). Algunos investigadores han incorporado instrumentos de observación de clases, que consideran la dimensión disciplinar y la especificidad del contenido, para estudiar prácticas docentes que promueven el desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior (Barriendos et al., 2018; Martínez Videla et al., 2016).

El estudio de procesos educativos que consideren las especificidades disciplinares constituye un campo abierto y desafiante en educación superior. Implica considerar los modos de pensamiento, razonamiento y aprendizaje propios de una disciplina, que se traducen en prácticas y formas de interacción específicas en el aula. Lo anterior cobra aún más relevancia si se considera que el constructo de práctica docente (‘teaching practice’) tiende a ser mencionado en muchos trabajos sin precisar su comprensión teórica y, por tanto, sin considerar sus componentes o dimensiones en las decisiones metodológicas.

Desde esta perspectiva, el presente trabajo buscó responder: ¿Qué características tienen las prácticas docentes orientadas a promover el razonamiento matemático en un aula universitaria? Se plantea que el estudio comprensivo de las prácticas docentes en el contexto chileno de educación superior constituye un recurso valioso para orientar oportunidades de desarrollo y perfeccionamiento pedagógico pertinente a los profesores de matemática.

Marco Teórico

Naturaleza Semiótica y Social del Pensamiento

Desde el enfoque sociocultural adoptado en la presente investigación, la interacción con el entorno social resulta crítica para el aprendizaje y el desarrollo de los seres humanos (Vygotski, 1978/1979). Desde esta perspectiva, la configuración de los procesos mentales se explica a partir de una relación dialéctica con los contextos históricos, sociales y culturales donde participan los sujetos. Es a partir de su participación en determinadas comunidades socialmente organizadas que las personas van apropiándose de formas culturales específicas de pensar y actuar.

Dicho de otro modo, la participación en la vida social, en tanto actividad humana, se encuentra mediada por la cultura a través de signos y herramientas que favorecen el desarrollo de los procesos psicológicos en un contexto social e histórico determinado (Vygotski, 1978/1979; Wertsch, 1985/1995, 1997/1999). Wertsch (1997/1999) propone el concepto de *acción mediada* para explicar la tensión irreductible que existe entre el sujeto que realiza la acción y las herramientas culturales utilizadas para ello. La premisa que se encuentra a la base de este planteamiento, es que "cualquier forma de acción es imposible, o al menos muy difícil, sin una herramienta cultural y un usuario hábil en su empleo" (Wertsch, 1997/1999, p. 57). Las herramientas culturales, en tanto producciones culturales desarrolladas a lo largo de la historia humana, pueden ser tanto materiales y tangibles como simbólicas (Wertsch, 1997/1999). Considerando lo anterior y para efectos del presente trabajo, se consideró indistintamente como herramienta cultural a los artefactos tangibles —una calculadora—, simbólicos —el lenguaje— y aquellos de carácter intelectual o institucional, como la matemática y el currículum (Mercer & Littleton, 2007/2016).

En el ámbito educativo, la enseñanza y el aprendizaje constituyen procesos sociales y culturales que configuran la acción humana (Wertsch, 1997/1999), a través de herramientas culturales que median la expansión y transformación del pensamiento y las acciones. El lenguaje ha sido considerado como la herramienta cultural más importante, en tanto constituye un modo social de pensar que permite comunicar, pero también razonar y aprender con otros (Mercer & Littleton, 2007/2016). Desde esta perspectiva, cualquier aprendizaje se produce primero en una dimensión interpsicológica, para luego trasladarse a un plano intramental, producto de complejas elaboraciones (Vygotski, 1978/1979).

Esta idea resulta fundamental si se considera que el diálogo pedagógico en el aula es construido en gran medida a partir de las interacciones comunicativas entre profesor y estudiantes (Camargo Uribe & Hederich Martínez, 2010; Mercer, 2000/2001). En instituciones formales de educación, la relación entre ambos es asimétrica y se encuentra marcada por posiciones estructurales y/o institucionales más amplias, que otorgan poder al profesor (Mercer, 2000/2001).

Asimismo, es el docente quien tiene el predominio del control en las prácticas cotidianas, aun cuando — producto de su naturaleza dinámica— es susceptible de disputarse a lo largo del desarrollo de la interacción.

En estos intercambios, el rol del docente consistiría en ofrecer sistemáticamente actividades que permitan a los estudiantes alcanzar un desarrollo conceptual que difícilmente lograrían sin andamiaje (Wood et al., 1976) o fuera de su zona de desarrollo próximo (Vygotski, 1978/1979). Las interacciones en las que predomina el discurso del docente y los estudiantes se limitan a repetir conceptos o inferir aquello que el profesor espera, no favorecen el proceso de internalización. En la medida en que el control y la responsabilidad respecto al aprendizaje no salga del discurso del docente, es muy difícil que los estudiantes logren una auténtica construcción conceptual y la elaboración de un discurso propio en relación al contenido (Camargo Uribe & Hederich Martínez, 2010).

Comunidades, Razonamiento Matemático y Prácticas Docentes

Desde las teorías de las prácticas sociales, se argumenta que la actividad humana posee un carácter *significativo* y se encuentra siempre orientada a un *propósito*, lo cual se debe a la participación del sujeto en diversas prácticas interconectadas. Esto implica que su comprensión no se limita a la consideración de regulaciones sociales y determinaciones estructurales (Fardella & Carvajal Muñoz, 2018).

Las instituciones educativas, en tanto comunidades sociales y culturales, se organizan a partir de prácticas y normas específicas (Rogoff, 2003; Valdivia & Herrera, 2018) que orientan la participación. Esto implica aprender formas específicas de razonar y de utilizar las herramientas culturales —incluyendo el lenguaje— que son validadas a nivel *disciplinar* en un determinado contexto sociohistórico (Mercer & Littleton, 2007/2016). El dominio de dichas herramientas culturales resulta un aspecto fundamental para la participación de las y los aprendices (Rogoff, 2003).

Específicamente, en el aprendizaje de una disciplina se tiende a privilegiar determinadas *formas de hablar y razonar* que reflejan un "género discursivo" (Bajtín, 1986, citado en Wertsch, 1997/1999) legitimado en las instituciones. Esta legitimidad, a su vez, se relaciona con una dimensión histórica y cultural de la disciplina, sus formas de enseñanza y sus prácticas institucionales (Wertsch, 1997/1999).

En lo que respecta al *razonamiento matemático*, es entendido como el proceso que permite manipular y analizar objetos, representaciones, diagramas, símbolos o declaraciones para sacar conclusiones basadas en evidencia o suposiciones (Battista, 2017). El desarrollo de estas habilidades permite comprender la naturaleza abstracta de la disciplina y trabajar con sus objetos y herramientas, favoreciendo la resolución de problemas (Chapin et al., 2003). En palabras de Russell (1999):

La matemática es una disciplina que trata con entidades abstractas, y el razonamiento es la herramienta para entender las abstracciones (...) Es en el aula donde el razonamiento matemático está en el centro de la actividad, (...) [siendo capaz de conducir] a una red interconectada de conocimientos dentro de un dominio matemático (...) [y de identificar] el razonamiento erróneo o incorrecto (p. 1-2).

Hjelte et al. (2020), por su parte, argumentan la falta de consenso respecto a su conceptualización. Plantean que es posible entender el razonamiento matemático a partir de dos grandes categorías: como capacidad de dominio general y como capacidad de dominio específico (relacionado con un tema o contenido en particular). Desde esta última perspectiva, el razonamiento es conceptualizado a partir de las distintas formas de resolver alguna tarea matemática, mediante el uso de herramientas o conceptos específicos. Se consideran diversos tipos de razonamiento y en distintos niveles de complejidad.

De acuerdo con Niss y Højgaard (2019), el razonamiento matemático es "analizar o producir argumentos (es decir, cadenas de afirmaciones enlazadas por inferencias) expuestas en forma oral o escrita para justificar afirmaciones matemáticas" (p. 16).

Desde un marco centrado en la evaluación y en coherencia con los planteamientos de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2018), el razonamiento matemático se relaciona con evaluar situaciones y estrategias, desarrollar y describir soluciones y determinar soluciones lógicas.

Así, el estudiantado razona matemáticamente cuando: (a) identifica, reconoce, organiza, conecta y representa; (b) construye, abstrae, evalúa y deduce; (c) justifica, explica y defiende y (d) interpreta, hace juicios, critica, refuta y cualifica (OCDE, 2018).

Considerar las particularidades del razonamiento de una disciplina tiene implicancias para las prácticas docentes, las que se relacionan principalmente con favorecer en los estudiantes el desarrollo de formas de pensamiento que les permitan participar y comunicarse adecuadamente en comunidades discursivas más amplias (Mercer & Littleton, 2007/2016).

A partir de lo anterior, resulta relevante comprender las *prácticas docentes* como prácticas sociales en el sentido de Valdivia y Herrera (2018), quienes se inspiran en las teorías de la actividad situada para plantear la interrelación y dependencia entre acción, pensamiento, sentimiento y valor en el abordaje de las prácticas. Es así como las prácticas docentes orientadas a la enseñanza de las matemáticas pueden ser definidas a partir de tres dimensiones fundamentales: las *actividades* cotidianas y regulares que realiza el profesor en el aula, los *significados* asociados y generados a partir de dicha actividad y las *orientaciones* que se encuentran implicadas y condicionan su participación. Estas dimensiones interrelacionadas se ponen en juego y tensionan constantemente, en distintos niveles. Desde esta mirada, las prácticas docentes "inevitablemente comprenden y conjugan las formas normativas que se han desarrollado a lo largo de determinados períodos históricos, con las formas emergentes de la actividad situada" (Aranda Cáceres, 2019, p. 39).

Esta comprensión de las prácticas docentes permite estudiar los fenómenos microsociales y psicosociales que se dan en el aula, en estrecha interacción y de forma coherente con la visión de ser humano adoptada en esta investigación (Vygotski, 1978/1979; Wertsch, 1997/1999). De este modo, para comprender este objeto en profundidad se vuelve necesaria una aproximación, tanto a las comprensiones que tiene el docente respecto de sus prácticas (significados y orientaciones), como también a las acciones que se conjugan en los intercambios con sus estudiantes en el aula al momento de enseñar.

Método

Diseño

Para este trabajo se utilizó una metodología de estudio de caso cualitativo, ya que interesaba comprender un fenómeno en profundidad y el significado dado por los actores involucrados (Merriam, 2001).

Se escogió un caso de interés intrínseco (Merriam, 2001) y de fácil acceso (Stake, 1995/1999), en el que era posible contar con un informante y en que los lineamientos y prácticas institucionales daban cabida a la participación de los actores. La facilidad en el acceso estuvo dada por la posición de una de las investigadoras, quien trabajaba como asesora psicoeducativa en la unidad académica seleccionada.

Fue relevante para los objetivos de la investigación que el caso cumpliera con los siguientes criterios: (a) facultad de una universidad altamente selectiva con sistemas alternativos para el ingreso, (b) interés en el desarrollo y acompañamiento a la docencia, (c) relevancia de la matemática para la formación profesional de las y los estudiantes y (d) alto porcentaje de reprobación y bajas calificaciones en las asignaturas matemáticas en primer año.

Descripción de Unidad de Estudio y Sujetos Participantes

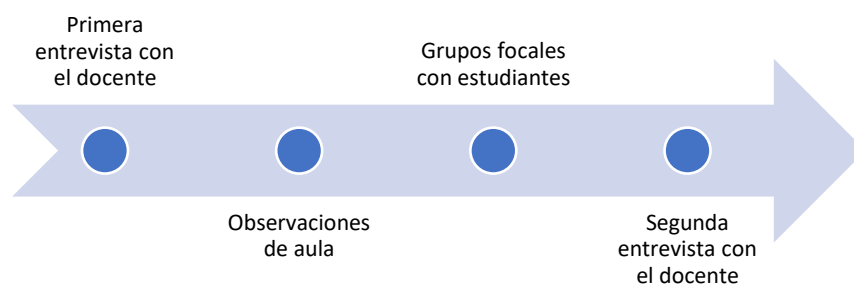
La unidad de estudio correspondió a una sección de una asignatura matemática de primer año impartida a estudiantes del ámbito de las ingenierías. Fue escogida debido a la cercanía del profesor responsable con la investigadora, en su rol de asesora docente en la facultad. El docente, para ese entonces, contaba con más de 10 años de experiencia y se encontraba interesado en el desarrollo y mejora de sus prácticas.

El estudio se focalizó en el tema *Funciones*, escogido por el docente, debido a su relevancia en la formación profesional. Los sujetos participantes fueron, además del profesor, los estudiantes inscritos que asistieron a las clases de Funciones y que accedieron a colaborar voluntariamente en la investigación autorizando el registro audiovisual y las observaciones de aula. En los grupos focales participaron siete estudiantes.

Producción de Información

Para abordar el objetivo propuesto y de acuerdo al marco teórico adoptado, se contemplaron tres técnicas de producción de información que se aplicaron en distintos momentos (Figura 1).

Figura 1
Momentos y Formas de Producción de Información



Primero, se realizó una entrevista semiestructurada al docente, dada la imposibilidad de "observar" directamente sus pensamientos respecto de sus prácticas, así como sus efectos y los elementos del contexto que pudiesen incidir en ellas; igualmente, porque resultaba pertinente para un estudio de caso con pocos individuos (Merriam, 2001).

Luego, en coherencia con el constructo teórico de práctica adoptado, se realizaron observaciones de aula con registro escrito y audiovisual (dos cámaras), con el fin de acceder al contexto cotidiano de aula en el que los actores participaban naturalmente y también debido al interés práctico de la investigación, consistente en generar acciones para apoyar y fortalecer las prácticas del docente participante. La utilización de videograbaciones se justifica en tanto permite registrar con mayor precisión las acciones e interacciones entre los actores educativos y entre éstos con los artefactos y el espacio de aula. Siguiendo a Erickson (2011), cuando se aborda la comprensión de las prácticas de interacción en un contexto específico en tiempo real, es posible capturar momentos relevantes que, de otra forma, podrían pasar desapercibidos y, con ello, empobrecer la producción de información.

Específicamente, el registro de video contempló el uso de dos cámaras: una ubicada al centro y en la parte posterior del aula, orientada a capturar las acciones y material utilizado por el docente (Cámara 1) y otra ubicada en una esquina de la sala, con el fin de acceder a la participación de los estudiantes durante las clases (Cámara 2).

El registro escrito se orientó a identificar aspectos de la interacción relevantes para el aprendizaje, tales como descripción general de la estructura de la clase, contenido revisado, metodología de enseñanza (rol de profesor y estudiantes durante cada sesión) y participación de los estudiantes, especialmente en aquel sector del aula donde la Cámara 2 no accedía: interacciones profesor-estudiante (estrategias y recursos de enseñanza utilizados por el profesor —lingüísticos, materiales, emocionales, entre otros—). Asimismo, se dirigió a describir las interacciones entre profesor e investigadora antes, durante y después de la clase.

Una vez finalizada y evaluada la unidad de aprendizaje, se realizó una segunda entrevista al profesor, con el propósito de clarificar o profundizar aspectos relevantes de sus prácticas docentes. De igual forma, se hizo una convocatoria abierta, a través de correo electrónico y contacto telefónico, a los estudiantes que habían asistido a por lo menos cinco de las clases observadas, invitándolos a participar de manera voluntaria en un grupo focal. Esto se hizo con el fin de incorporar las comprensiones de los estudiantes sobre las prácticas del profesor y sus experiencias de aprendizaje. Esta técnica se consideró pertinente para acceder a las comprensiones de los sujetos sobre su actividad y la actividad de otros en un contexto definido por ellos mismos.

Se realizaron dos grupos focales: uno con aquellos estudiantes que aprobaron la asignatura y otro con los que la reprobaron. En base a estos criterios y al interés en participar de la investigación, asistieron cuatro estudiantes al primero y tres estudiantes al segundo. En la Tabla 1 se presentan las características de los estudiantes participantes.

Tabla 1
Características de los Estudiantes Participantes en Grupos Focales

Grupo	Tipo de colegio	Tipo de ingreso	Puntaje PSU Matemática
Estudiantes aprobados	Particular subvencionado	BEA 5% superior	648
	Particular	PSU	730
	Particular	Admisión especial	762
	Municipal emblemático	Consecución de estudios	706
Estudiantes reprobados	Sin información, estudiante extranjero	Convenio extranjero	Sin PSU
	Particular subvencionado	PSU	640
	Particular subvencionado	BEA 5% superior	656

Nota. Beca excelencia Académica (BEA) y Prueba de Selección Universitaria (PSU)

Procedimiento

El cuidado y resguardo de los participantes desde un punto de vista ético, contempló las siguientes acciones:

1. Carta de consentimiento informado institucional: firmado por autoridades de la unidad académica seleccionada, autorizando no solo la realización del estudio, sino también el uso de información de caracterización y rendimiento de los estudiantes, así como también del programa de asignatura y de documentos internos de la línea formativa.
2. Negociación de participación con docente: se realizó una primera reunión con el profesor con el fin de plantear los objetivos de la investigación e invitarlo a participar. Se le informó acerca de su rol en el estudio, de los momentos y técnicas de recolección de información contemplados y el tiempo estimado del trabajo de campo y de los resguardos éticos. La confirmación de su participación se concretó a través de la firma de un consentimiento informado que detallaba la información entregada verbalmente.
3. Primera Entrevista a docente: Fue realizada en abril de 2018 por la investigadora principal, en dependencias de la institución participante.
4. Presentación de la investigadora y del estudio de forma previa a las observaciones semi-participantes: en el caso de los/as estudiantes, se realizó en el contexto de aula, explicitando los objetivos, voluntariedad, resguardo de daños y perjuicios, utilización de la información para mejorar procesos de docencia y conocimiento científico (como potencial beneficio) y posibilidad de abandonar el estudio en cualquier momento. Igualmente, y de acuerdo con Erickson (2011), se explicitó que el acceso al material audiovisual sería exclusivo para el equipo de investigación a cargo de codificar y analizar los datos, firmando, además, un acuerdo de confidencialidad respecto al acceso y tratamiento de los registros. Esto se realizó debido a que el resguardo de la confidencialidad, es decir, de las identidades individuales de las/os participantes, reducen el riesgo de daños o perjuicios, tales como la vergüenza y el castigo administrativo, legal (Erickson, 2011) e incluso docente.

Las personas que estuvieron de acuerdo firmaron un consentimiento informado que detallaba los elementos explicados verbalmente. Ningún estudiante se negó a participar; solo dos de ellos manifestaron que no deseaban ser videograbados, pero que no se oponían a la realización del estudio. Para asegurar esta condición, se acordó que la cámara orientada hacia los estudiantes se ubicaría siempre en el mismo sector de la sala en que se encontraban estos alumnos, filmando en dirección opuesta a ellos, en los dos tercios contiguos de la sala.

5. Carta de consentimiento informado para los estudiantes que participaron en el grupo focal, en el que se explicitaron las condiciones de esta instancia y el resguardo en el uso de información. En agosto de 2018, se realizaron en paralelo, dos grupos focales con estudiantes en las dependencias de la Universidad. La investigadora principal moderó el grupo integrado por estudiantes que aprobaron la asignatura, mientras que el otro grupo focal fue moderado por una profesional del área previamente capacitada para ello.
6. Segunda entrevista a docente: Fue realizada por la investigadora principal en noviembre de 2018, una vez avanzado el análisis de los datos.

Estrategia de Análisis

Para responder al objetivo propuesto y en función de la técnica de producción de información, se establecieron tres estrategias de análisis, las cuales se detallan a continuación.

Estrategia para Analizar Entrevistas a Docente y Grupos Focales

Se llevó a cabo un análisis de contenido, desde la teoría fundamentada, de la información producida en las entrevistas y en los grupos focales. Esta decisión se sustentó en el carácter sociohistórico y situado de las prácticas docentes, coherente con una forma de construir teoría con base en los datos empíricos que la sustentan (Monje Álvarez, 2011). La investigadora responsable realizó el proceso de codificación, utilizando el programa ATLAS.ti Scientific Software Development GmbH (2018) para codificar las transcripciones y contemplando las fases de codificación abierta, axial y selectiva. Luego se elaboró un reporte escrito de los resultados del profesor y otro de los resultados de los estudiantes.

Estrategia para Analizar Observación Semi-participante

Se realizó un análisis categorial temático de los registros escritos de la investigadora responsable.

Estrategia para Analizar el Material Audiovisual

La estrategia de análisis contempló el establecimiento de dos etapas. En primer lugar, la codificación de los videos de clase, mediante una serie de dimensiones relevantes para el aprendizaje de la matemática. En segundo lugar, y a partir de la codificación previa, la caracterización de las interacciones en el aula, desde el punto de vista de la acción mediada.

Codificación de las Interacciones de Aula. Se seleccionaron siete de las diez clases videograbadas (Figura 2), considerando como criterio de confiabilidad aceptable la observación de al menos dos clases consecutivas (Cantrell & Kane, 2013), que contemplaran sesiones en el inicio, desarrollo y finalización del tema.

Figura 2
Selección de Clases para Análisis de Videos

Clases observadas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Clases analizadas		X		X	X	X		X	X	X

El material audiovisual se codificó usando la Pauta de Observación de Clases de Matemáticas Promate (Barriendos et al., 2018). Esta pauta cuenta con un dominio de Gestión General de la Clase y otro de Gestión de la Enseñanza de las Matemáticas. Para este trabajo sólo se consideró el segundo dominio, compuesto por siete dimensiones, de las cuales se escogió solo una para fines de este trabajo. La dimensión Promoción del Pensamiento en Torno a la Matemática se encuentra definida en los siguientes términos:

El profesor promueve el pensamiento en torno a las matemáticas cuando hace preguntas o requerimientos que cumplen con alguna de las siguientes características:

- Provocan a los estudiantes a pensar y analizar ideas, conceptos o procedimientos.
- Demandan elaboración y comunicación de argumentos y conjeturas.
- Implican la extensión de una situación.
- Relacionan el contenido que se está abordando con los conocimientos previos.
- Utilizan conocimientos cotidianos y de sentido común como soporte o como punto de partida para abordar o interpretar una situación matemática.

Además, el profesor da tiempo suficiente para pensar, trabajar o elaborar, y sus intervenciones no interrumpen el trabajo de los estudiantes; reformula cuando es necesario y no acepta respuestas cortas sin argumentación.

Barriendos et al. (2018, p. 34).

Según el protocolo del instrumento, cada clase fue dividida en segmentos de 15 minutos, que se evaluaron de forma independiente con valores de 1 a 5, donde: 1 es *incipiente*, 2-4 es *medio* y 5 es *competente*. La codificación fue realizada por dos codificadores certificados para la utilización de Promate y se realizó doble codificación de un 20% de los segmentos, consensuando las diferencias que pudieran existir.

Análisis Interpretativo de las Interacciones. Con el fin de obtener una comprensión más acabada de la actividad del docente en interacción con sus estudiantes, se estableció como unidad teórica de análisis la acción mediada. Esta decisión se sustenta en la posibilidad de analizar la interacción entre agente y herramientas culturales (Wertsch, 1997/1999), en consideración al carácter eminentemente semiótico del lenguaje y otras herramientas culturales y a su relevancia como mediadores de la enseñanza de la disciplina matemática.

Desde el marco teórico, se buscó describir las particularidades de la actividad docente, operando con distintas herramientas culturales en co-ocurrencia (por ejemplo, utilizar el lenguaje verbal y señalar un objeto concreto al mismo tiempo). Se utilizaron descripciones narrativas que consideraron el contexto y contenido disciplinar.

Es importante mencionar que se elaboró un reporte de resultados de las interacciones de aula y, luego, una integración de todos los informes de reporte para responder al objetivo planteado desde el constructo teórico de práctica adoptado.

Resultados

A continuación, se presentan los resultados que permiten caracterizar las prácticas docentes orientadas a promover el razonamiento matemático. De acuerdo con el constructo teórico adoptado, los resultados se organizan a partir de las comprensiones (orientaciones y significados obtenidos a través de entrevistas y grupos focales) y las acciones que se producen en el aula (información producida a través de observación y videograbación de clases).

Comprensiones de Profesor y Estudiantes sobre las Prácticas Docentes

En este apartado se presentan de manera integrada tanto las comprensiones que tiene el docente sobre sus prácticas como los estudiantes respecto a su experiencia en procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Para ello, se utilizaron los siguientes documentos, elaborados a partir del análisis diferenciado de los datos, por actor educativo: Reporte de resultados de las comprensiones del docente, Reporte de resultados de las comprensiones de los estudiantes y Reporte de Observación Semi-Participante de investigadora responsable.

La información obtenida se ha organizado en dos categorías emergentes: enseñanza y aprendizaje de la disciplina y razonamiento matemático en la enseñanza y aprendizaje de las funciones.

Enseñanza y Aprendizaje de la Disciplina

Esta categoría da cuenta de las orientaciones y significados sobre la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina, referidos por los actores educativos. Comprende cuatro subcategorías (importancia del razonamiento matemático, importancia del lenguaje matemático, importancia de las emociones en el aprendizaje matemático y naturaleza práctica de la matemática). Sin embargo, para fines de este trabajo se presentará solo una de ellas: *importancia del razonamiento matemático*.

El profesor visualiza el razonamiento matemático como un aspecto clave en el aprendizaje de las matemáticas, en tanto alude a la *formación de un criterio para la toma de decisiones* en la resolución de problemas. Esto implica modelar el problema y escoger la herramienta más adecuada para resolverlo.

Lo que yo trataba de plantear es que nosotros vivimos expuestos a diversas situaciones que para nosotros son problemas. Entonces, ese problema uno lo aborda de lo macro a lo micro, porque si lo aborda solo de lo micro puede que vaya solamente a atacar un síntoma y no a resolver la causa del problema. Entonces, cuando yo hablo de razonamiento matemático me refiero a: un problema llevarlo a una abstracción tal que yo pueda ver cuáles son las distintas herramientas que me pueden ayudar a resolver e ir bajando esa abstracción hasta encontrar la herramienta óptima. (Fragmento Entrevista 2)

Asimismo, el razonamiento tendría que ver con un *proceso mental*, que permite definir y comprender el problema matemático a partir de la información entregada, y que se utiliza de forma independiente a la herramienta escogida. En este sentido, el profesor enfatiza en la importancia de formar un *criterio para la elección de la herramienta*, que resulte eficiente:

(...) yo en algún minuto te decía "yo puedo hacer un túnel con dos cucharas, pero me voy a demorar mucho más y va a ser mucho menos eficiente que tomar las herramientas que me da la construcción para hacer ese túnel". Lo mismo para los niños. Podrían estar tratando de resolver un problema a través de un método de funciones lineales y, claro, pueden llegar a una respuesta, pero va a ser menos eficiente si se dan cuenta que el problema está puesto desde una función logarítmica o de una función exponencial. (Fragmento Entrevista 2)

Un tercer elemento que emerge de las entrevistas es el rol docente en la promoción del razonamiento, ya que visualiza que las desigualdades del sistema escolar se perpetúan en el primer año de educación superior. Frente a esto, el docente manifiesta la importancia de explicitar *paso a paso los procedimientos*, buscando que todos sean capaces de responder y, así, abordar la diversidad del aula:

E: ... entonces quieren que sea todo ahora, todo inmediato y de una manera. Ejemplo, estamos viendo en este minuto, las dos últimas clases hicimos inecuaciones, entonces, llegamos a inecuaciones con módulos, y les hice una inecuación con módulo *con el método más carretero* que encontré.

I: ¿Qué significa carretero?

P: Paso a paso, y lo fuimos desarrollando muy lento, para que todos entendieran el sentido de lo que estamos haciendo y ahí un alumno levanta la mano y dice "pero, profe, si hay un teorema que dice que se hace en dos pasos", entonces le pregunté yo "¿y por qué vamos a usar el teorema primero antes de entender el sentido del por qué hay que hacerlo?" y él me dijo "porque hay que usar mejor el tiempo... ¿el tiempo de qué?, porque de tus compañeros hay algunos que no saben el teorema y si yo les explico el teorema se van a quedar con la fórmula y no el por qué y a mí me interesa que entiendan el por qué y que después vean ¡oh!, había una fórmula fácil, pero van a saber qué están haciendo. Ah..." me dijo, me parece súper bien, ya ok, estoy de acuerdo. (Fragmento Entrevista 1).

Por su parte, para las y los estudiantes de ambos grupos focales, el razonamiento también resulta un aspecto clave en el aprendizaje matemático. Enfatizan la importancia de comprender la *lógica que está detrás de la resolución de un problema*, especialmente ante situaciones nuevas:

E: (...) porque como dice él, cuando uno *entiende la lógica* de algo es como muy raro que se te vaya a olvidar, yo creo que, si no me acuerdo de la lógica o no hay lógica, se te va a olvidar, así que no me acuerdo mucho de funciones. (Fragmento Grupo Focal Estudiantes Reprobados).

El razonamiento comprendido de esta manera estaría relacionado con una *forma de pensar* que permitiría *tomar decisiones* al momento de resolver problemas y no con una simple memorización de pasos, asociada a la mecanización de los aprendizajes:

E1: Es que yo encuentro que *es malo* cuando uno empieza a hacer las cosas *mecánicamente*, porque muchas veces, claro, te evalúan con ejercicios parecidos, pero al momento en que te cambian alguna cosa y tienes que usar los mismos elementos, cuesta mucho visualizarlo.

I: Ya, ¿podrías profundizar un poquito más en esa idea?

E1: Como intentar memorizar los pasos no creo que sea bueno, sino que *entender la razón* de por qué hacerlo de esta forma te hace llegar al resultado, como *la lógica que tiene detrás*, donde la resolución mecánica no es... (Fragmento Grupo Focal Estudiantes Aprobados)

La cita anterior permite ejemplificar la valoración negativa que los estudiantes aprobados tienen sobre la *mecanización* del aprendizaje matemático, concebida como una memorización de procedimientos que no responde a un aprendizaje significativo. El razonamiento que se encuentra a la base de una resolución matemática es lo que permitiría, según los estudiantes, aprender.

Razonamiento Matemático en la Enseñanza y Aprendizaje de las Funciones

Respecto al contenido específico analizado, los estudiantes coinciden en que las clases se caracterizaban, en general, por la *explicación del contenido* y la *resolución de algún ejercicio*, a modo de ejemplo en la pizarra. Las observaciones de aula también permiten identificar esta estructura, así como el uso de dos recursos materiales para apoyar las explicaciones: la *pizarra* y *diapositivas* en formato Powerpoint.

Sobre aquellas prácticas orientadas a la *explicación*, los estudiantes aprobados coinciden en que el *uso de diapositivas dificulta el proceso de aprendizaje*, en términos de sincronizar la propia actividad (prestar atención, comprender y escribir) con la del profesor (explicar apoyándose en la presentación). Plantean que la explicación con pizarra permite un mejor ajuste entre las actividades de ambos actores:

E4: entonces es distinto cuando el profesor escribe todo en la pizarra a cuando pasan diapos, porque típico que si el profe está apurado pasa más rápido las diapos, uno no alcanza a anotar todo; en cambio, si escribe en la pizarra, *uno lo va procesando más lento*, entonces, como que va quedando más, retienes más la materia. (Fragmento Grupo Focal Estudiantes Aprobados)

En relación con las oportunidades de ejercitar o aplicar los conceptos desarrollados teóricamente, se identifica una participación más activa de las/os estudiantes cuando tienen la posibilidad de observar la resolución o resolver ellos mismos. El docente señala que usa estas instancias para *favorecer el desarrollo del razonamiento matemático*, mediante la explicitación de la metodología implicada en el proceso y de distintas formas de resolución:

Hay dos elementos que yo mismo lo fuerzo, la metodología del problema que tiene que ver con *reconocer las variables, plantear el problema*, empezar a plantear las herramientas matemáticas que te pueden ayudar a resolver el problema, desarrollar el problema con una de las herramientas y concluir, eso lo hacemos en todos los problemas largos porque *esa es la metodología, esa es la abstracción que tienen que hacer*, más allá de lo que les presenten siempre va a ser lo mismo en matemáticas (...), entonces, eso lo vamos recalcando y esa es la metodología que yo he ido ocupando hace varios años. (Fragmento Entrevista 2)

Los estudiantes aprobados visualizan esta intención de promover el razonamiento matemático por parte del docente, pero no así aquellos que reprobaron. Por el contrario, interpretan esta actividad como una enseñanza orientada a la mecanización y memorización de pasos y fórmulas:

A2: (...) sentía que, en realidad a las últimas clases ni siquiera fui, o iba de forma intermitente, porque yo me sentaba y no entendía nada, no entendía ni la lógica detrás, porque *nos enseñaban solamente memorizar pasos y fórmulas...* A memorizar y a intentar mecanizar pasos, pero sin explicar por qué era así, pasar la materia no más. (Fragmento Grupo Focal Estudiantes Reprobados)

No obstante, el profesor manifiesta su intención de favorecer distintos procedimientos en la realización de los ejercicios, así como también la *explicitación del propio razonamiento* de los estudiantes en el proceso. La *pizarra constituye la principal herramienta* identificada por el docente para favorecer el razonamiento matemático en los estudiantes, a través de la explicación de la propia actividad y el abordaje de errores:

(...) y voy sacando gente a la pizarra y a esa gente que sale a la pizarra le pido que explique, generalmente algunos ejercicios de a uno, otros en pareja, mientras uno escribe, el otro explica y hago que debatan de lo que está pasando y por qué resuelve uno de una manera. Y siempre hay uno que lo hubiera hecho de otra manera, entonces, dividen la pizarra, entonces "haz tú el ejercicio de otra manera y explica por qué", porque al final si el problema está bueno, está bien resuelto, van a llegar al mismo resultado, a la misma conclusión, el tema es qué herramientas ocuparon y cómo lo desarrollaron. (Fragmento Entrevista 1)

El uso de la pizarra se concibe de forma distinta por los estudiantes que aprobaron la asignatura y quienes no. Para los primeros, la *ejercitación en pizarra* es vista como una *oportunidad* de aprendizaje, ya que permite visualizar el desarrollo de los ejercicios e identificar y corregir errores con ayuda del profesor. Por el contrario, los estudiantes que reprobaron no visualizan estas actividades como una oportunidad de aprendizaje, sino que más bien *critican la rapidez* con la que se realizan los ejercicios y el *uso de un solo método*:

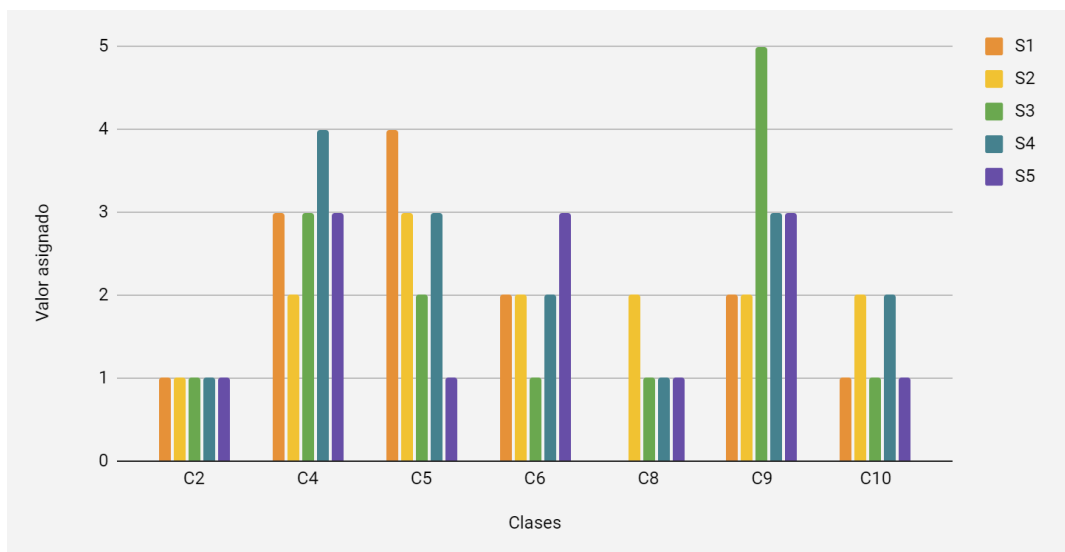
(...) el trabajo en clases es muy rápido, los profes explican todo muy rápido, se dan tiempo para hacer dos ejercicios de buena forma y casi siempre muestran solo un método, el que más les gusta, no siempre muestran otros y eso igual dificulta, porque hay gente que tiene distintos tipos de aprendizaje. (Fragmento Grupo Focal Estudiantes Reprobados)

Interacciones de Aula en la Enseñanza de Funciones

El instrumento utilizado comprende el razonamiento matemático como el tipo de preguntas y demandas que hace el profesor a los estudiantes y las oportunidades que da para que elaboren sus respuestas.

En la Figura 3 es posible observar los puntajes obtenidos para la dimensión Promoción del Pensamiento, al codificar las siete clases seleccionadas (C2, C4, C5, C6, C8, C9, C10), cada una de ellas dividida en cinco segmentos (S1, S2, S3, S4, S5).

Figura 3
Promoción del Pensamiento en Torno a las Matemáticas



Los valores asignados responden a las características de las prácticas observadas. De este modo, una valoración 0 da cuenta de una acción no observada; el valor 1 muestra prácticas no demostradas, incipientes o bien contrarias a los criterios de la dimensión; los valores 2, 3 o 4 describen prácticas que responden a dichos criterios, pudiendo encontrarse justo al medio o bien más cerca del nivel anterior o de la valoración máxima.

Finalmente, un valor 5 dará cuenta de prácticas que alcanzan a cumplir a cabalidad los criterios de la dimensión analizada.

En el gráfico es posible apreciar una mayor promoción del pensamiento matemático en C4, C5 y C9, obteniendo solo en esta última una valoración máxima. Los valores 2, 3 y 4 (medio) dan cuenta de un intento del docente por favorecer en los alumnos procesos de pensamiento más complejo que, sin embargo, no logra finalizar con éxito, debido a la *anticipación* de las respuestas esperadas. Específicamente, se observan interrupciones a las respuestas de los estudiantes, entregando la solución o completando sus respuestas parciales o incompletas, en vez de reformular las preguntas planteadas. También queda en evidencia que no se da suficiente tiempo para que las y los estudiantes elaboren sus respuestas. La Figura 1 muestra que esto sucede en 20 de los 35 segmentos de clases codificados.

En este sentido, se observa que el profesor tiende a realizar preguntas cerradas o requerimientos acerca del contenido, que no favorecen procesos de pensamiento complejo en los estudiantes. Pese a que también realiza preguntas o requerimientos orientados a analizar, argumentar y/o relacionar el contenido con conocimientos previos, el modo de gestionarlos presenta algunas dificultades para el desarrollo del pensamiento matemático.

Un ejemplo de la valoración 3 se puede apreciar en el siguiente extracto, en el que se describe un momento de la actividad, en el que, en primera instancia, el profesor logra favorecer el análisis y argumentación de una estudiante. Sin embargo, en los intercambios posteriores no da tiempo suficiente para responder y termina él mismo elaborando el razonamiento esperado:

Ejemplo 1

Descripción de Episodio con Valoración 3

El profesor trabaja con las y los estudiantes analizando si la función $f(x) = x^2$ tiene inversa. Plantea la pregunta a sus estudiantes y les anima a participar.

Un estudiante plantea que $f(x) = x^2$ no tiene inversa, porque no es inyectiva, es decir, dos preimágenes tienen la misma imagen. En este momento el profesor escribe en la pizarra: "NO es inyectiva, NO es epiyectiva" y luego pregunta: "¿y además?"

Las y los estudiantes no contestan, ante lo cual el profesor señala: "pero su compañera me dice que raíz de x es la inversa". Ante esto, se produce el siguiente diálogo:

Estudiante 1: no, raíz de y .

Profesor: Ya, pero finalmente como las variables son mudas va a ser raíz de x , pero finalmente ¿por qué ella piensa que raíz de x o raíz de y van a ser la inversa?

El profesor espera unos segundos y, dado que nadie contesta, le pregunta a una estudiante de forma directa:

Profesor: ¿Qué piensa usted?

Estudiante 2: Que la raíz puede tomar valores...

Profesor: Ya, ¿cómo te imaginas que es la gráfica de esta función?

Al mismo tiempo que el estudiante intenta responder, el docente va al computador y les dice que mientras su compañero piensa, él va a intentar dibujar. Trabaja un momento en el computador, se proyecta la gráfica y pregunta: ¿Qué pasa aquí?, ¿qué vemos nosotros? Antes de que algún estudiante responda el profesor señala:

Profesor: Aquí **gráficamente podemos ver que no es inyectiva**, porque si yo, para la misma imagen, trazo una recta paralela al eje, x corta en dos puntos, tiene dos preimágenes, entonces, no puede ser inyectiva y, además, si yo tiro una paralela al eje de las x aquí abajo [apuntando bajo el eje x] no corta en ningún punto a la gráfica de la función, entonces **no es epiyectiva**:

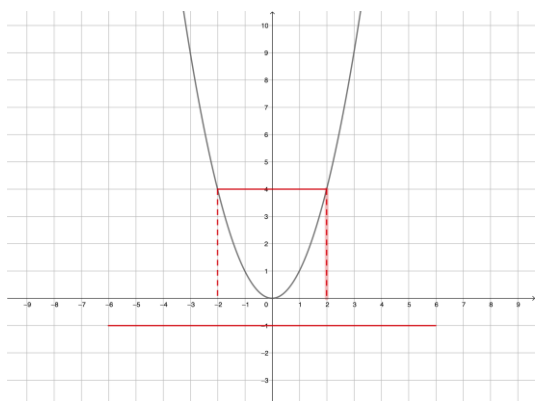


Imagen 1: Ejemplo gráfico de una función que no es inyectiva ni epiyectiva.

(Transcripción registro audiovisual, Clase 9, Segmento 2, minutos 00:17:00-00:17:23 / 00:17:38-00:20:13)

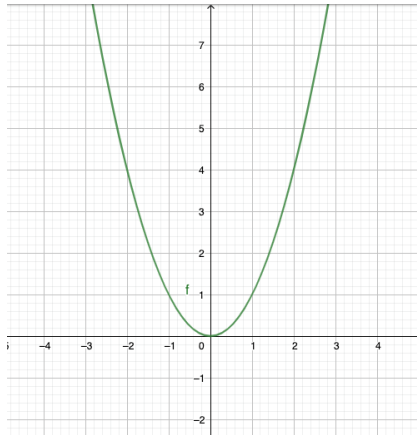
Nota. Las líneas presentadas en la imagen han sido dibujadas para mostrar las indicaciones que realiza el profesor en la gráfica.

Por otro lado, el valor 5 se observa cuando el docente da oportunidades a los estudiantes de desarrollar explicaciones, hacer preguntas, crear hipótesis y/o argumentar, pero, adicionalmente, gestiona dichos requerimientos de forma adecuada, dando tiempo a los estudiantes para elaborar y reformular preguntas, además de andamiar, si fuera necesario. El segmento 3 de la clase 9 ha sido valorado con 5, y corresponde a un momento de análisis del contenido que permite mirar de forma comprensiva cómo se trabaja la promoción de pensamiento en el aula (Ejemplo 2).

Ejemplo 2*Descripción de Episodio con Valoración 5*

El profesor se encuentra analizando si la función $f(x) = x^2$ tiene inversa, esta vez intentando determinar el dominio y recorrido de la función $f(x)^{-1}$. Para ello analizan la gráfica de la función $f(x)$.

El docente, mostrando la gráfica desarrollada con "graph" que se proyecta en la pizarra, pregunta: *¿dónde está el recorrido de $f(x)^{-1}$? ¿y dónde está el dominio?*



Los estudiantes responden, analizando la función $f(x)$, en particular, estableciendo que el dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es el conjunto de los números reales desde 0 al infinito positivo.

Teniendo dichos elementos definidos, el profesor plantea que cuando existe función inversa, el dominio de $f(x)$ es el recorrido de $f(x)^{-1}$ y el recorrido de $f(x)$ corresponde al dominio de $f(x)^{-1}$.

Profesor: ¿cuál es el dominio de $f(x)^{-1}$? ¿y el recorrido?

Da unos segundos de pausa.

Profesor: Porque si $f(x)$ va de aquí hasta acá [muestra la gráfica], $f(x)^{-1}$ va al revés.

Estudiante 3: Ya, pero el recorrido son los valores que toma y...

Profesor: Sí

Estudiante 3: si x toma cualquiera de los valores de 0 hasta el más infinito, ¿cómo es posible que y tome un valor de 0 a menos infinito? O sea, el 0 lo puede tomar.

A partir de dichos cuestionamientos y utilizando el gráfico de $f(x)$, el profesor va haciendo preguntas a sus estudiantes para que elaboren una explicación respecto de si la función $f(x)$ tiene inversa.

A medida que se va guiando el análisis, ellos plantean que, en este caso, dado que cada elemento del recorrido tiene dos preimágenes, entonces en el caso de la inversa, a cada preimagen le corresponden dos elementos del recorrido. Esto les lleva a plantearse que dicha función no tiene inversa, porque se obtiene una relación que no es función.

Lo anterior permite que el docente introduzca la posibilidad de la existencia de $f(x)^{-1}$, considerando restricciones en el dominio y el recorrido de $f(x)$.

En el Ejemplo 2 es posible identificar los dos elementos que definen la *promoción del pensamiento* según Promate: el planteamiento de requerimientos que permiten a los estudiantes elaborar producciones matemáticas y la gestión de dichos requerimientos. Por una parte, el profesor plantea preguntas abiertas orientadas a analizar la situación, que pueden ser respondidas a partir del análisis de la gráfica de la función. Por otra parte, el profesor da tiempo para que las y los estudiantes respondan y propone nuevas preguntas a partir de lo que han planteado, de forma de ayudarles a profundizar en su pensamiento. Esto permite que los estudiantes respondan que $f(x)$ no tiene inversa, dado que cada preimagen de $f(x)^{-1}$ tendría dos imágenes. A partir de esta elaboración conjunta entre las y los estudiantes, el profesor introduce la idea de restringir el dominio y recorrido de una función para definir su función inversa.

Discusión

Considerando la pregunta de investigación planteada en un inicio, la discusión se centrará en algunas similitudes y diferencias sobre las prácticas docentes, identificadas en las comprensiones y actividades de los actores educativos en el aula.

Un aspecto común que emerge de las comprensiones, es la valoración del razonamiento matemático como un aspecto central para el aprendizaje. En coherencia con los planteamientos de Russell (1999), el profesor destaca que se trata de un proceso que permite modelar problemas a través del uso de herramientas. Por su parte, los estudiantes (aprobados y reprobados) valoran el razonamiento matemático como la forma analítica de aprender. En este sentido, se aproximan a la propuesta de Chapin et al. (2003), quienes entienden el razonamiento como una forma de pensar que es particular de la disciplina y que permite trabajar con sus objetos y herramientas. Estas comprensiones aluden a un proceso complejo que, desde los resultados de las interacciones en el aula, se traduce en un intento sostenido del docente por realizar preguntas orientadas al análisis.

Lo anterior es coherente con la intención manifestada por el docente: promover el razonamiento matemático en el aula. Utilizando una metodología que denomina *paso a paso*, va desglosando de forma ordenada y estructurada en la pizarra el razonamiento que fundamenta las decisiones que permiten resolver los problemas propuestos. Esta práctica se ve orientada por el interés de brindar oportunidades de aprendizaje a *todas/os las/os estudiantes*, especialmente a quienes han tenido menos oportunidades educativas en sus trayectorias escolares previas. Respecto a este punto, emerge una diferencia entre los estudiantes: solo quienes aprobaron la asignatura perciben la intención docente de promover el razonamiento matemático y las actividades propuestas como una oportunidad de aprendizaje. Por el contrario, aquellos que reprobaron, la interpretan como una actividad orientada a la mecanización y memorización de pasos y fórmulas que no les permite participar.

Esto se alinea con el registro escrito de las observaciones de aula, que da cuenta que todos los estudiantes del grupo focal de aprobados participaron en las interacciones dialógicas en más de una oportunidad, mientras que del otro grupo solo se registró una intervención. Esta dinámica de interacción, en la que solo algunas/os tienen la posibilidad de participar, permite afirmar que las "voces que se escuchan" en el aula serían predominantemente la de los alumnos aprobados, no solo por utilizar herramientas culturales adecuadas y dominarlas, sino que además por enfrentar los problemas específicos a ese entorno cultural y disciplinar de mejor manera (Wertsch, 1997/1999).

Desde la perspectiva de los estudiantes que reprobaron, esto se relaciona con el ritmo de las clases, debido a que el tiempo no resulta suficiente para "madurar" el contenido y comprender el razonamiento a la base de las resoluciones mostradas por el docente en la pizarra. Estos resultados van en la misma línea de lo planteado por Cifuentes Orellana et. al (2017), quienes aluden a la incidencia del tiempo en la mejora de los aprendizajes de aquellos estudiantes que presentan necesidades de nivelación.

La problemática del ritmo de la clase y el tiempo de interacción en torno a las preguntas del docente también se levanta como un elemento interesante de analizar desde las observaciones de clases. En los resultados se observa que la promoción del pensamiento fue valorada en nivel medio en 21 de los 35 segmentos. Si bien esto da cuenta del predominio de preguntas o requerimientos orientados a favorecer procesos de pensamiento más complejos, también constata la falta de tiempo para que los estudiantes elaboren sus argumentos (Barriandos et al., 2018). La anticipación del docente a las respuestas de los alumnos, mediante explicaciones, entrega de soluciones o argumentos complementarios, dan cuenta del predominio del discurso docente en las interacciones.

Estos resultados podrían interpretarse como un intento de ceder el control y la responsabilidad a los estudiantes sobre su propio aprendizaje (Coll & Solé, 2018), pero también como una dificultad para ceder dicho control en tareas que requieren interacciones y construcciones grupales más complejas. La tensión observada entre las comprensiones del docente y su actividad se expresan claramente en las interacciones con uso de pizarra y explicación a todo el curso. Por una parte, manifiesta una clara intención de mediar los razonamientos de sus aprendices y, por otra, se observa la tendencia a recuperar rápidamente el control sobre el discurso en el aula, utilizando conceptos, razonamientos y elaboraciones que no son comprendidos por todos los estudiantes. De hecho, la metodología paso a paso le permite modelar en la pizarra una forma lineal de razonar. Con esto el docente busca asegurar la equidad en los aprendizajes, pero, al mismo tiempo, envía el mensaje implícito de que los estudiantes cuentan con un conocimiento insuficiente, que no les permite abordar la resolución sin la mediación docente.

Lo anterior se da en un contexto de asimetría entre ambos actores, donde el profesor es quien cuenta con mayor conocimiento y dominio del currículum y de los modos de mediación legitimados por la disciplina y la institución (Mercer, 2000/2001). Desde el enfoque sociocultural, se argumenta que para favorecer la internalización de los aprendizajes, el control y la responsabilidad deben salir del discurso docente, implicando a los estudiantes en las actividades de aula (Castro Torres & Aranda Cáceres, 2016) y promoviendo un discurso propio en torno al contenido (Camargo Uribe & Hederich Martínez, 2010), mediante el análisis y argumentación de sus puntos de vista y justificación de procedimientos, para favorecer el desarrollo del razonamiento matemático (Hjelte et al., 2020; Niss & Højgaard, 2019).

Desde la perspectiva de la acción mediada (Wersch, 1999), es posible señalar que en las interacciones se ponen en juego una serie de herramientas culturales propias del contenido abordado, tales como el lenguaje algebraico, las estrategias de resolución y el uso de diversas representaciones (gráfica y algebraica), entre otras. En este sentido, la discrepancia entre los estudiantes respecto al valor del uso de la pizarra para favorecer el desarrollo del razonamiento matemático puede entenderse a partir de los distintos niveles de dominio de estos modos de mediación. Es decir, quienes tienen cierto dominio del lenguaje matemático, sus representaciones y estrategias de resolución, visualizan las explicaciones en pizarra como una oportunidad de aprendizaje. Por el contrario, quienes tienen menores niveles de dominio sobre estos modos de mediación, presentan dificultades para seguir el paso a paso del profesor y, por tanto, de participar en la interacción.

Estos resultados podrían entenderse a partir de las diferentes necesidades de andamiaje (Wood et al., 1976) de las/os estudiantes para el dominio de las herramientas culturales ofrecidas y el aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas involucrados en la resolución de problemas. Desde esta perspectiva, se presenta para el docente el desafío de lograr que dichos estudiantes alcancen niveles superiores de cognición, a través de un acompañamiento ajustado a su zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1978).

De acuerdo con lo dicho anteriormente y en relación con la pregunta planteada, es posible dar cuenta de tensiones entre las distintas dimensiones de las prácticas docentes, particularmente, entre una comprensión del razonamiento matemático, cuyo desarrollo se asocia a una activa participación de todas/os las/os aprendices, y una actividad en la que esta no es del todo favorecida. Dichas tensiones pueden comprenderse, también, a la luz de las experiencias de las/os estudiantes.

Conclusiones

Teniendo en cuenta los resultados y su discusión, es posible concluir que el desarrollo del razonamiento matemático es un elemento relevante y valorado en el aula observada. El docente lo plantea como un objetivo del trabajo matemático y como una forma de entregar herramientas a sus estudiantes. Por su parte, las y los estudiantes manifiestan que el desarrollo del razonamiento matemático les permite trabajar comprensivamente los contenidos.

Así, con el fin de guiar las actividades en el aula, el docente plantea una metodología paso a paso, lo que desemboca en un trabajo que no logra favorecer el razonamiento matemático con equidad en el aula, dado que el predominio del discurso docente no da lugar a la elaboración del estudiantado. Es así como las prácticas propuestas consideran una sola forma de pensar, que es modelada a través de una alta estructuración en la resolución de problemas, y un predominio del discurso del profesor.

Lo anterior invita a reflexionar sobre la existencia de comprensiones que pueden estar a la base de estas prácticas, por ejemplo, respecto al modo de generar aprendizajes equitativos, que se relaciona con la responsabilidad que tiene el profesor de asegurar que sus estudiantes alcancen el nivel de desarrollo de razonamiento esperado. De esta manera, el foco está puesto en el saber del docente y en su rol de evitar, identificar y corregir errores, como primer y último responsable.

Por otra parte, los resultados permiten constatar que dicha metodología no es independiente de los distintos tiempos de aprendizaje y niveles de dominio de las herramientas culturales. Como consecuencia, no todos pueden seguir la propuesta docente y quedan en evidencia necesidades que se deben abordar en el aula a partir de procesos de andamiaje.

De esta forma, en la presente investigación ha sido posible describir el trabajo que se realiza en un aula universitaria para promover el razonamiento matemático, identificando, al mismo tiempo, algunas limitaciones. Una de ellas es que la diversidad de técnicas y estrategias de producción de información y análisis definen un trabajo de campo complejo, por lo que aumentar el número de docentes para extender la caracterización comprensiva, resultaría costoso. Asimismo, aun cuando se realizó una capacitación a los camarógrafos, hubo falencias en la obtención del registro esperado que significaron dificultades en el análisis. Se sugiere para futuros estudios de este tipo implicar a dichos profesionales desde la formulación de la investigación, con el propósito de brindar información teórica y metodológica relevante para tomar decisiones en la producción de estos registros.

Como proyecciones, se identifica la opción de replicar el estudio variando las condiciones de contexto, profundizando, además, en la relación entre lenguaje y razonamiento matemático, las interacciones entre pares y las herramientas tecnológicas (incluyendo inteligencia artificial generativa, como modos de mediación para el aprendizaje de funciones. Así mismo, de ampliar la contribución teórica de práctica docente a partir de la propuesta conceptual y metodológica del estudio, y sus resultados.

En términos de orientaciones para la docencia, a partir de los resultados y su discusión, queda en evidencia la importancia de avanzar en la generación de espacios de participación en el aula, donde los estudiantes tengan la posibilidad de construir caminos alternativos y variados. De este modo, los resultados obtenidos constituyen un insumo para el diseño de programas de formación y perfeccionamiento docente, con un carácter situado.

Finalmente, se plantea la relevancia de considerar la diversidad del estudiantado como un elemento clave para enriquecer el trabajo matemático en las aulas. Se constata que la mayor parte del tiempo se trabaja en aunar las formas de resolución, lo que limita el desarrollo del razonamiento matemático, el que, a su vez, requiere contemplar diversos puntos de partida para discutir sobre el conocimiento en desarrollo. Se considera que mientras no se abran los espacios dentro del aula para que sean las y los estudiantes quienes desarrollen argumentos diversos, valorando los distintos niveles de conocimiento matemático con los que cuentan, se enfrentan situaciones en que las posibilidades de desarrollar razonamiento matemático, desde una perspectiva de equidad e inclusión, serán limitadas o nulas.

Referencias

- Aranda Cáceres, R. (2019). *Prácticas docentes orientadas al aprendizaje de las matemáticas en la formación de pregrado de primer año: estudio de caso en una facultad de economía y negocios que presenta políticas de equidad e inclusión* [Tesis de magister, Universidad de Chile]. Repositorio Académico de la Universidad de Chile. <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/182511>
- ATLAS.ti Scientific Software Development GmbH (2018). ATLAS.ti Mac (versión 8) [Software de análisis de datos cualitativos]. <https://atlasti.com>
- Bailey, T., Jeong, D. W. & Cho, S. -W. (2010). Referral, enrollment, and completion in developmental education sequences in community colleges. *Economics of Education Review*, 29(2), 255-270. <https://doi.org/10.1016/j.econedurev.2009.09.002>
- Bain, K. (2004). *What the best college teachers do?* Harvard University Press.
- Bain, K. & Zimmerman, J. (2009). Understanding great teaching. *Peer Review*, 11(2), 9-12. http://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://dgm81phhvh63.cloudfront.net/content/user-photos/Publications/Archives/Peer-Review/PR_SP09_Vol11No2.pdf
- Ball, D. L. (2001). Teaching, with respect to mathematics and students. En T. Wood, B. S. Nelson & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 11-22). Lawrence Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781410612335>
- Barriandos, A. L., Martínez Videla, M. V., Dominguez-Bravo, E. & Berger Correa, B. (2018). *Manual Promate: pauta de observación de clases de matemáticas impartidas por profesores principiantes*. Universidad de Chile, Centro de Investigación Avanzada en Educación, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación & Gobierno de Chile, Ministerio de Educación. https://www.researchgate.net/publication/358072762_Manual_ProMate_Pauta_de_observacion_de_clases_de_matematicas_impartidas_por_profesores_principiantes_Chile_-_Mexico
- Battista, M. T. (2017). *Reasoning and sense making in the mathematics classroom: Grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics, U.S.
- Beanland, D. (25 de marzo de 2010). *Challenges and opportunities facing the education of engineers* [Presentación de ponencia]. 2010 Engineering Expo Engineers Australia, Melbourne, Australia.
- Bernasconi, A. & Rojas, F. (2004). *Informe sobre la educación superior en Chile: 1980-2003*. Editorial Universitaria.
- Bose, E. & Remillard, J. (2011). Looking for equity in policy recommendations for instructional quality. En B. Atweh, M. Graven, W. Secada & P. Valero (Eds.), *Mapping equity and quality in mathematics education* (pp. 177-190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9803-0_13
- Brannan, K. & Wankat, P. (12-15 de junio de 2005). *Survey Of First-Year Programs* [Presentación de ponencia]. 2005 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition, Portland, OR, Estados Unidos. <https://peer.asee.org/collections/2005-annual-conference?page=6>
- Brunner, J. J. (2008). El sistema de educación superior en Chile: un enfoque de economía política comparada. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas)*, 13(2), 451-486. <https://doi.org/10.1590/S1414-40772008000200010>
- Brunner, J. J. (2013). On the classification of universities. *Pensamiento Educativo: Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 50(1), 115-129. <https://doi.org/10.7764/PEL.50.1.2013.9>
- Brunner, J. J. & Uribe, D. (2007). *Mercados universitarios: el nuevo escenario de la educación superior*. Ediciones Universidad Diego Portales.
- Camargo Uribe, A. & Hederich Martínez, C. (2010) La relación lenguaje y conocimiento y su aplicación al aprendizaje escolar. *Folios: Revista de la Facultad de Humanidades*, 31, 105-122. <https://doi.org/10.17227/01234870.31folios105.121>
- Canales Cerón, M., Opazo Baeza, A. & Camps, J. P. (2016). "Salir del cuarto". Expectativas juveniles en el Chile de hoy. *Última Década*, 24(44), 73-108. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-22362016000100004>
- Cantrell, S. & Kane, T. J. (2013). *Ensuring fair and reliable measures of effective teaching: culminating findings from the MET project's three-year study*. Bill & Melinda Gates Foundation. <https://usprogram.gatesfoundation.org/news-and-insights/usp-resource-center/resources/ensuring-fair-and-reliable-measures-of-effective-teaching-culminating-findings-from-the-met-projects-three-year-study>
- Castro, M. P., Aranda, C., Castro, C., Lizama, C., De Torres, H. & Williams, J. (2016). Fundamentos y discusión de la acción afirmativa "cupó de equidad" (2010-2012) de la carrera de psicología de la Universidad de Chile. En C. Zúñiga, J. Redondo, M. López & E. Santa Cruz (Eds.), *Equidad en la educación superior: desafíos y proyecciones en la experiencia comparada* (pp. 197-218). El Buen Aire.
- Castro Torres, P. & Aranda Cáceres, R. (2016). Mecanismos de influencia educativa en un preuniversitario popular de Santiago de Chile: control del aprendizaje y equidad en la educación superior. *Estudios Pedagógicos*, 42(2), 51-68. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000200004>
- Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, C. N. (2003). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn, grades 1-6*. Math Solutions Publications.
- Chingos, M. M., Griffiths, R. J. & Mulhern, C. (2017). Can low-cost online summer math programs improve student preparation for college-level math? Evidence from randomized experiments at three universities. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 10(4), 794 – 816. <https://doi.org/10.1080/19345747.2017.1300362>
- Cifuentes Orellana, M. B. & Mella Luna, J. (2017). Separar para integrar: una experiencia de nivelación en matemáticas en el programa académico de bachillerato de la Universidad de Chile. En O. Jeréz & C. Silva (Eds.), *Innovando en educación superior: Experiencias clave en Latinoamérica y el Caribe 2016-2017. Volumen 1: gestión curricular y desarrollo de docencia (2017)* (pp. 133-142). Facultad de Economía y Negocios, Universidad de Chile. <https://doi.org/10.34720/fsrp-ze78>
- Cifuentes Orellana, M. B., Munizaga Mellado, F. R. & Mella Luna, J. (2017). Más tiempo para aprender: Evidencias para aportar al debate sobre equidad, inclusión y gratuidad de la educación superior a partir de resultados de dispositivos de nivelación matemática. *Pensamiento Educativo: Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 54(1), 1-15. <https://doi.org/10.7764/PEL.54.1.2017.1>
- Coll, C., & Solé, I. (2018). Enseñar y aprender en el aula. En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (Eds.), *Desarrollo Psicológico y Educación* (pp. 357-386). España: Alianza Editorial.
- De Guzman, M., Hodgson B., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in passage from secondary to tertiary education. En G. Fischer & U. Rehmann (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vol III: pp. 747-762)*. Berlín.

- Erickson, F. (2011). Uses of video in social research: a brief history. *International Journal of Social Research Methodology*, 14(3), 179-189. <https://doi.org/10.1080/13645579.2011.563615>
- Fardella, C. & Carvajal Muñoz, F. (2018). Los estudios sociales de la práctica y la práctica como unidad de estudio. *Psicoperspectivas*, 17(1), Artículo 9. <http://dx.doi.org/10.5027/psicoperspectivas-vol17-issue1-fulltext-1241>
- Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Giaconi, V. & Espinoza, C. G. (2015). Problem solving teaching practices: Observer and teacher's view. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9), 4-8 February 2015, Prague, Czech Republic, Charles University in Prague, Faculty of Education* (pp. 3022-3028). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289734>
- Ferguson, R. F. & Danielson, C. (2014). How framework for teaching and Tripod 7Cs evidence distinguish key components of effective teaching. En: T. J. Kane, K. A. Kerr & R. Pianta (Eds.), *Designing teacher evaluation systems: new guidance from the Measures of Effective Teaching project* (pp. 98-143). Bill & Melinda Gates Foundation & Jossey-Bass. <https://doi.org/10.1002/9781119210856.ch4>
- Fitzsimons, G. E. (2011). A framework for evaluating quality and equity in post-compulsory mathematics education. En B. Atweh, M. Graven, W. Secada & P. Valero (Eds.), *Mapping equity and quality in mathematics education* (pp. 105-121). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9803-0_8
- Godoy Ossa, F., Varas Scheuch, L., Martínez Videla, M., Treviño, E. & Meyer, A. (2016). Interacciones pedagógicas y percepción de los estudiantes en escuelas chilenas que mejoran: una aproximación exploratoria. *Estudios Pedagógicos*, 42(3), 149-169. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000400008>
- Graff, R. & Leiffer, P. (12-15 de junio de 2005). *Student observations over the last 25 years* [Presentación de ponencia]. 2005 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition, Portland, OR, Estados Unidos. <https://peer.asee.org/student-observations-over-the-last-25-years.pdf>
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6>
- Hativa, N., Barak, R. & Simhi, E. (2001). Exemplary university teachers: knowledge and beliefs regarding effective teaching dimensions and strategies. *The Journal of Higher Education*, 72(6), 699-729. <https://doi.org/10.2307/2672900>
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511. <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>
- Hjelte, A., Schindler, M. & Nilsson, P. (2020). Kinds of mathematical reasoning addressed in empirical research in mathematics education: A systematic review. *Education Sciences*, 10(10), Artículo 289. <https://doi.org/10.3390/educsci10100289>
- Jones, S., Sugar, T., Baumgardner, M., Raymond, D., Moore, W., Davidson, R. & Denham, K. (2012). *Remediation: Higher education's bridge to nowhere*. Complete College America. <https://completecollegeamerica.s3.us-east-2.amazonaws.com/wp-content/uploads/2017/11/05151215/CCA-Remediation-final.pdf>
- Karnani, M. (2018). Evaluación de impacto de un programa de nivelación matemática: un enfoque de regresión discontinua. En Departamento de Pregrado, *Experiencias de Innovación Docente 2017 Universidad de Chile*. (pp. 42-48). Universidad de Chile, Vicerrectoría de Asuntos Académicos.
- López, L. & Pérez, P. (2013). *Informe: asesoría en equidad y retención en la educación superior*. Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ingeniería, Centro de Investigación en Creatividad y Educación Superior.
- Martínez, M. V., Godoy, F., Treviño, E., Varas, L. & Fajardo, G. (2018). ¿Qué nos revelan los instrumentos de observación de aula sobre clases de matemática en escuelas con trayectoria de mejoramiento? *Educação e Pesquisa*, 44, Artículo e165144. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201702165144>
- Martínez Videla, M. V., Perdomo Díaz, J. & Araya, P. (2016). Desarrollo y validación de una pauta de observación de clases de matemática: MateO. En Instituto de Matemáticas, *Acta XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática, Valparaíso 13-14 de Diciembre, 2016* (pp. 251-255). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes: cómo usamos el lenguaje para pensar juntos* (Trad. Genis Sánchez Barberán). Paidós. (Obra original publicada en 2000)
- Mercer, N. & Littleton, K. (2016). ¿Cómo promueve la interacción el aprendizaje y el desarrollo? (Trad. autorizada correspondiente al capítulo 2, How does interaction help learning and development? Extraída de la primera versión del libro publicado en 2007). En J. Manzi y M. R. García (Eds.), *Abriendo las puertas del aula: transformación de las prácticas docentes* (pp. 33-58). Ediciones Universidad Católica de Chile. (Obra original publicada en 2007).
- Merriam, S. B. (2001). *Qualitative research an case study applications in education: Revised and expanded case study research in education*. (Second edition). Jossey-Bass.
- Mesa, V., Celis, S. & Lande, E. (2014). Teaching approaches of community college mathematic faculty: Do they relate to classroom practices? *American Educational Research Journal*, 51(1), 117-151. <https://doi.org/10.3102/0002831213505759>
- Mesa, V. & Chang, P. (2010). The language of engagement in two highly interactive undergraduate mathematics classrooms. *Linguistics and Education*, 21(2), 83-100. <https://doi.org/10.1016/j.linged.2010.01.002>
- Mkhatshwa, T.P. (2024). Best practices for teaching the concept of the derivative: Lessons from experienced calculus instructors. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(4). <https://doi.org/10.29333/ejmste/14380>
- Monje Álvarez, C. A. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa: guía didáctica*. Universidad Surcolombina, Facultad de Ciencias Sociales y humanidades. Programa de Comunicación Social y Periodismo. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf>
- Mota, D. y Valles, R. (2015). Papel de los conocimientos previos en el aprendizaje de la matemática universitaria. *Acta Scientiarum. Education*, 37(1), 85-90. <https://doi.org/10.4025/actascieduc.v37i1.21040>
- Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Nite, S. B., Donald, A. G., Capraro, R. M., Bicer, A. & Morgan, J. (2016). Supporting engineering education through calculus success. En S. T. Smith, Y. Yan Lim, A. Bahadori, N. Lake, R. Vasquez Padilla, A. Rose & K. Doust (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Australasian Association for Engineering Education AAEE2016, The Changing Role of the Engineering Educator for Developing the Future Engineer, 4-7 December 2016, Coffs Harbour, Australia*. (pp. 1-7). Coffs Harbour. https://researchoutput.csu.edu.au/files/224615408/11133548_Published_paper.pdf

- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2018). *PISA 2022 mathematics framework (draft)*. <https://pisa2022maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>
- Peña-Vicuña, P. y Acosta-Peña, R. (2023). La formación en docencia universitaria, aportes y desafíos para la profesionalización docente. *Estudios Pedagógicos* 49(3), 293-310. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052023000400293>
- Pontificia Universidad Católica de Chile. (s.f.). *Programa de Inserción a la Matemática Universitaria*. <https://pimu.mat.uc.cl/>
- Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. Oxford University Press.
- Russell, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. En L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12: 1999 yearbook* (pp. 1-12). National Council of Teachers of Mathematics.
- Santelices, M. V., Horn, C. & Catalán, X. (2015). *Consideraciones de equidad en la admisión universitaria a través del ranking de educación media: teorías de acción, implementación y resultados* (Proyecto FONIDE N° 811340). Gobierno de Chile, Ministerio de Educación, División de Planificación y Presupuesto, Departamento de Estudios y Desarrollo, Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación. <https://hdl.handle.net/20.500.12365/18572>
- Sebastián, C. (2007). La diversidad interindividual como una oportunidad para el aprendizaje de los estudiantes de educación superior. *Revista Calidad en la Educación*, 26, 83-101. <https://doi.org/10.31619/caledu.n26.234>
- Speer, N. M., Smith, J. P. & Horvath, A. (2010) Collegiate mathematics teaching: an unexamined practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(2), 99-114. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.02.001>
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos* (Reimpresión de la 1ª ed., Traducido por Roc Filella). Morata. (Obra original publicada en 1995)
- Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.
- Tolley, P. A., Blat, C., McDaniel, C., Blackmon, D. & Royster, D. (2012). Enhancing the mathematics skills of students enrolled in introductory engineering courses: Eliminating the gap in incoming academic preparation. *Journal of STEM Education: Innovations and Research*, 13(3), 74-86. <https://www.jstem.org/jstem/index.php/JSTEM/article/view/1684>
- Treviño, E., Toledo, G. & Gempp, R. (2013). Calidad de la educación parvularia: las prácticas de clase y el camino a la mejora. *Pensamiento Educativo: Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 50(1), 40-62. <https://doi.org/10.7764/PEL.50.1.2013.4>
- Uribe, D., Espinoza, O. & González, L. E. (2008). La probabilidad de terminar la educación secundaria y de acceder a la educación superior en Chile: análisis estadístico de modelos. *Revista de la Educación Superior*, 37(145), 25-39. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-27602008000100002&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- Valdivia, A. & Herrera, M. (2018). Aprendizajes y prácticas mediáticas en la escuela. Desafíos de la etnografía escolar con jóvenes. En J. Assaél & A. Valdivia (Eds.), *Lo cotidiano en la escuela: 40 años de etnografía escolar en Chile* (pp. 221-237). Editorial Universitaria.
- Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Traducido por Silvia Furió). Crítica. (Obra original publicada en 1978)
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Wertsch, J. V. (1995). *Vygotsky y la formación social de la mente* (ed. española, Trad. Javier Zanón y Montserrat Cortés). Paidós. (Obra original publicada en 1985).
- Wertsch, J. V. (1999). *La mente en acción*. AIQUE Grupo Editor.
- Wood, D., Bruner, J. S. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89-100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>
- Zurita Garrido, F. A. (2015). El sistema universitario en el Chile contemporáneo. *Educação em Revista*, 31(2), 329-343. <https://doi.org/10.1590/0102-4698138059>

Fecha de recepción: Agosto de 2022.

Fecha de aceptación: Octubre de 2024.